

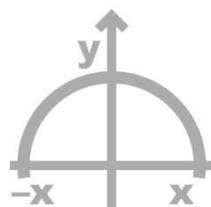
סטטיסטיקה



$$\begin{matrix} \sqrt{2} \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix}$$
A gray square divided into four quadrants by diagonal lines, containing the numbers 1, 1, $\sqrt{2}$, and 1.



$$\{\sqrt{x}\}^2$$
A white line-art icon of the mathematical expression $\{\sqrt{x}\}^2$.



תוכן העניינים

1.	הסקה סטטיסטית - הקדמה	1
4.	אמידה נקודתית (אח"ה, א ני"מ, עקיות esm)	4
29.	רוח סמך לתוחלת (ממוצע)	29
36.	רוח סמך לפרופורציה	36
42.	רוח סמך להפרש פרופורציות	42
44.	רוח סמך להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגמים בלתי תלויים	44
48.	רוח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזוגיים	48
50.	רוח סמך לשונות וסטיית תקן	50
55.	שאלות מסכימות על רוחי סמך	55
58.	בדיקה השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)	58
65.	מבוא לבדיקה השערות על פרמטרים	65
71.	בדיקה השערות על תוחלת (ממוצע)	71
103.	בדיקה השערות על פרופורציה	103
116.	בדיקה השערות על הפרש פרופורציות	116
120.	בדיקה השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים	120
135.	בדיקה השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזוגיים	135
145.	הקשר בין רוח סמך לבדיקה השערות להפרש תוחלות	145
148.	בדיקה השערות על שוניות	148
159.	שאלות מסכימות בבדיקה השערות	159
176.	מבחני Chi בריבוע	176
201.	ניתוח שוניות חד כיוונית	201
210.	ניתוח שוניות דו כיווני	210
246.	מקדם המתאים (מדד קשר) הlienاري ומובהקותו	246

תוכן העניינים

273.....	24. רגרסיה פשוטה.....
(ללא ספר).....	25. רגרסיה מרובה

سطטיסטיקה

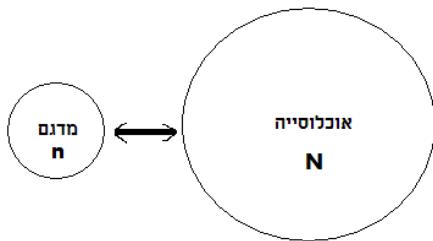
פרק 1 - השקעה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

1. כללי

הסקה סטטיסטית – הקדמה:

רקע:



אוכלוסייה: קבוצה שאליה מפנים שאלת מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסייה חולית הסוכרת בעולם.

מבחן:

חלק מותך האוכלוסייה.
למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מותך חולית הסוכרת אז זהו מבחן מותך אוכלוסיית חולית הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיון שאין גישה לכללה, היא גדולה מדי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מבחן במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מה樣ם לאוכלוסייה.
הדגימה בקורס תהיה דגימה מקראית - הכוונה לדוגמה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכל במדגם.

סטטיסטי:

גודל המוחושב על המבחן.

פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)	
μ	\bar{X}	משמעות
P	\hat{p}	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממוגן למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראות התפלגות הדגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

625 מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר הכנסת מסוים.

הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

א. מי האוכלוסייה?

ב. מה המשתנה?

ג. מה הפרמטרים?

ד. מהו גודל המדגם?

ה. מהו הסטטיסטי שמתכוונים להוציא ממדגם?

ו. האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

שאלות:

- 1)** מתווך כלל הסטודנטים במכללה שסיוומו סטטיסטיקה א' נדגמו שני סטודנטים. נתון שסכום הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
 - מה המשטנה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו גודל המדגם?
- 2)** להלן התפלגות מספר מקלט טלויזיה למשפחה בישוב "העוגן".
נגידר את X להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכנים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן במספר מקלט טלויזיה במדגם.
- מיי האוכלוסייה ומהו המשטנה הנחקר?
 - מהו הסטטיסטי שיילקח מהדגם ומה סימונו?

מספר משפחות	מספר מקלטים
0	50
1	250
2	350
3	300
4	50
	סך הכל $N = 1000$

- 3)** נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותו אוכלוסייה ומתכנים לפרש את מספר האקדמאים שנדגמו.
- מיי האוכלוסייה?
 - מה המשטנה באוכלוסייה?
 - מהם הפרמטרים?
 - מהו הסטטיסטי?

תשובות סופיות:

- 1)** א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א'. ב. ציון.
ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- 2)** א. האוכלוסייה: 1000 משפחות בישוב העוגן, המשטנה הנחקר: מס' מקלטים.
ב. $\bar{X} = \text{ממוצע מדגם}$.
- 3)** א. השכירים במדינה.
ב. השכלה: אקדמי, לא אקדמי.
ג. מס' האקדמאים באוכלוסייה: 0.2.

סטטיסטיקה

פרק 2 - אמידה נקודתית (אח"ה, אנ"מ, עקיבות mse)

תוכן העניינים

1. אומד חסר הטיהה	4
2. אומד נראות מקסימלית	11
3. MSE	19
4. אומד עקיב	22
5. שאלות מסכמוות	24

אומד חסר הטיה:

רעיון:

$E(\hat{\theta}) = \theta$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ , אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ :

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

3	2	1	X
4θ	$1 - 60\theta$	2θ	הסתברות

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפיות מההתפלגות: X_1 ו- X_2 .

א. הראו שהאומד: $T_1 = \frac{2X_1 + X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל- θ .

הטיה של אומד היא: $E(\hat{\theta}) - \theta$. כМОובן של אומד חסר הטיה אין הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1 ?

ג. תקנו את T_1 , כך שייהי אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא: $T_3 = 1.5X_1 - X_2 - 1$

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל- θ , אז $(\hat{\theta})g(\theta)$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $g(\theta)$, רק אם g תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל: $P(X = 3)$.

אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה σ^2 :

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X .

תזכורות חשובות:

$\sigma_Y = |a| \sigma_x$, $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$, $E(Y) = aE(X) + b$: אזי , $Y = aX + b$:

אם X_n, \dots, X_2, X_1 משתנים מקריים, אזי :

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם X_n, \dots, X_2, X_1 משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אזי :

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

שאלות:

1) הציון בבחן מסוים של תלמידי כיתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת μ , נלקח מוגם של 5 ציונים: X_1, \dots, X_5 . שלושה חוקרים הציעו אומדיים לתוחלת על סמך מוגם זה:

$$\text{חוקר א' הציע: } T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5}$$

$$\text{חוקר ב' הציע: } T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2}$$

$$\text{חוקר ג' הציע: } T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2}$$

- א. איזה מן האומדיים הוא חסר הטיה?
- ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שייהיה חסר הטיה.
- ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 100, 82, 58, 78, 65. חשבו את האומדיים המתקבלים עבורו האומדיים חסרי החטיה.
- ד. איזה מבין שני האומדיים חסרי החטיה עדיף? נמקו.

2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארץ"ב, נבחר מוגם של $n=2$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2 . הוציאו שני אומדיים ממוצע המשקל על סמך מוגם

$$\text{זה: } T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$$

- א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
- ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

3) $X \sim B(n, p)$. כלומר, X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסוי בודד) במוגם בגודל n .

- א. פתחו אומד חסר הטיה ל- P .
- ב. מהו אומד חסר הטיה לשיכוי לכישלון בניסוי בודד?
- ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?
- ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.

4) בתיק מנויות שתי מנויות. מספר המנויות שייעלו ביום מסויים הוא משתנה מקרי ה תלוי בפרמטר לא ידוע: θ , $0 \leq \theta \leq 2$.

פונקציית ההסתברות של X - מספר המנויות שייעלו ביום מסויים :

$$P(X=0) = 1 - \frac{\theta}{2}, \quad P(X=1) = \frac{\theta}{3}, \quad P(X=2) = \frac{\theta}{6}$$

א. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ , שמתבסס על מספר המנויות שייעלו ביום מסויים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ , שמתבסס על מספר המנויות שעלו ביום,

במשך שלושה ימים - X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל וهم בלתי תלויים).

5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות הantine בפרמטר θ באופן הבא :

הسيוכי שמטפלת לטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ

הסיוכי שמטפלת לטפל ב-2 תינוקות הוא $4\theta - 1$,

הסיוכי שמטפלת לטפל ב-3 תינוקות הוא θ .

במדגם מקרי של 4 מטפלות מות"א, נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיוכי שלמטפלת בת"א לטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדיים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מות"א. חשבו אומדיים.

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות :

א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ , אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר 5θ .

ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ , אז T^2 אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר θ^2 .

7) בפעול שני מכונות המייצרות מוצר. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p . במכונה השנייה הסתברות שמכשיר תקין היא $2p$. דוגמיהם 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה. נסמן ב- X את מספר המכשירים התקיניים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- Y את מספר המכשירים התקיניים שיוצרו על ידי המכונה השנייה. איזה מבין האומדיים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$

ב. $\frac{Y}{20}$

ג. $\frac{X+Y}{60}$

ד. $\frac{2X+Y}{80}$

8) יהיו T_1 ו- T_2 אומדיים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ .

א. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ^2 , המתבסס על T_1 ו- T_2 .

ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- $(\theta - 1)^2$, המתבסס על T_1 ו- T_2 .

9) נתון ש- X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2 .

נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסייה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ אומד חסר הטיה ל- μ , כאשר :

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות : $X_1 \cdot X_2$.

הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2 .

10) נתון $X_i \sim N(\mu, 1)$, כאשר : $i = 1, 2, \dots, n$.

נתון שהתצפיות הינו בלתי תלויות זו בזו.

מצאו אומד חסר הטיה ל- μ^2 .

11) נתונות n תצפויות בלתי תלויות מتوزע התפלגות בעלת הצפיפות הבאה :

$$\cdot f(x) = \begin{cases} \frac{1+\beta x}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. הראו כי האומד \bar{X}_3 הנז אומד בלתי מוטה ל- β .
- ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

12) הינם משתנים מקרים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית

$$\cdot f(x) = \begin{cases} X \cdot A & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{אחר} \end{cases} \quad \text{הצפיפות הבאה :}$$

- א. בטוו את ערכו של A באמצעות θ , כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.
- ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ , על סמך n התצפויות.

תשובות סופיות:

. T_1 . ת . $T_2 = 110$, $T_1 = 76.6$. ג . $\frac{2}{3}T_3$. ב . T_2 ו- T_1 . א . (1)

. T_2 . ב . א. ראו בווידאו. (2)

. θ . ת . X . ג . $1 - \frac{x}{n}$. ב . $\frac{x}{n}$. א . (3)

. $\frac{3\bar{x}}{2}$. ב . $\frac{3x}{2}$. א . (4)

. $3\left(1 - \frac{1}{2}\bar{x}\right)$. ת . 0.125 . ג . $1 - \frac{1}{2}\bar{x}$. ב . $1 - \frac{x}{2}$. א . (5)

ה. לשונות 0.917.

ב. לא נכון. (6) א. נכון.

(7) ב'.

. $T_1 - T_1 \cdot T_2$. ב . $T_1 \cdot T_2$. א . (8)

ב. שאלת הוכחה. (9) א. שאלת הוכחה.

. $\bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ (10)

. $V(3\bar{X}) = \frac{3 - \beta^2}{n}$. ב . (11) א. שאלת הוכחה.

. $\theta = \frac{3 - \bar{X}}{2}$. ב . $A = \frac{2}{\theta^2}$. א . (12)

אומד נראות מקסימלית:

רקע:

להלן נלמד את שיטת הנראות המקסימלית למציאת אומדים.

נניח ש- X משתנה מקרי בדיד עם פונקציית הסתברות $P(x, \theta)$,
כאשר θ הפרמטר הבלתי ידוע.

יהיו : X_1, X_2, \dots, X_n תוצאות מדגם מקרי בגודל n הנלקח מאוכלוסייה זו.

نبנה את פונקציית ההסתברות המשותפת (פונקציית הדגימה).

אם אנו יודעים את תוצאות המדגם, ולא את הפרמטר, קוראים לפונקציית הנראות
שהיא פונקציה של הפרמטר.

נגידר את פונקציית הנראות :

$$L(\theta) = P(x_1, \theta) \cdot P(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot P(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(x_i, \theta)$$

פונקציית הנראות היא ההסתברות לקבל את התצפית הראשונה (כפונקציה של θ),
כפול ההסתברות לקבל את התצפית השנייה, וכו'לו. כלומר, המשמעות של פונקציית
הנראות היא ההסתברות לקבל את המדגם שהתקבל, כפונקציה של הפרמטר המבוקש θ .

אם מדובר במשתנה רציף, נכפיל את פונקציות הצפיפות ולא את פונקציות ההסתברות :

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסיכוי של שחקן כדורסל לקלוע לסל הוא d (לא ידוע). השחקן זורק כדורים לסל
עד שהוא קולע בפעם הראשונה. נניח כי הזריקות בלתי תלויות זו בזו.

הכדור נכנס לסל לראשונה בניסיון השלישי.
השחקן חוזר על התחילה שוב, והפעם הכדור נכנס לסל בניסיון החמישי.
מצאו את פונקציית הנראות של d .

אומד נראות מקסימלית עבור $\hat{\theta}$ הוא האומד $\hat{\theta}$, שמקסם את פונקציית הנראות ($\theta|L$).
כלומר, אנו מוחפשים את האומד שיגרום לכך שהמודגם המקורי שקיבלנו יהיה
כמה יותר סביר.

שלבים למציאת אומד נראות מקסימלית:

- לוקחים את פונקציית ההסתברות המשותפת של המודגם (או צפיפות משותפת אם המשתנה רציף).
- מציבים את תוצאות המודגם ומקבלים את פונקציית הנראות (פונקציה של הפרמטר הנוכחי).
- מוצאים מקסIMUM לפונקציית הנראות (לעתים כדאי להוסיף \ln כדי להקל על המלאכה).

המשך דוגמה:

חשבו את אומדן הנראות המקסימלית עבור p .

משפט: אם $\hat{\theta}$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור θ , אז $\hat{\theta}(g)$ הוא אומד נראות מקסימלית עבור $(\hat{\theta}g)$, בהנחה והפונקציה היא חד-חד ערכית (אינוריאנטיות).

המשך דוגמה:

מצאו אומדן נראות מקסימלית לסיכוי של שחקו הcadorsl לקלוע לסל פעמיים בראץ.

שאלות:

- 1)** הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא d (לא ידוע).
 השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה.
 נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
 א. חשבו את פונקציית הנראות של d , וציירו גרף שלה.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור d .
 ג. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $-d$, אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים, עד אשר ניצח.
- 2)** מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסויימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של λ לköpחות ביום.
 א. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $-\lambda$, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסויים.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $-\lambda$, על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- n ימים מסויימים.
- 3)** הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר λ .
 דגמו 4 אנשים מקרים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם.
 התוצאות שהתקבלו בבדיקות הן: 3, 3, 7, 5.
 א. פתחו אומדן נראות מקסימלית לפרמטר זה על סמך n תוצאות כלשהן.
 ב. מהו האומדן לפרמטר?
- 4)** משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער, ביום אחד, מתפלג אחיד: $(0, q)U$.
 כדי לאמוד את θ , נשאלו ביום מסויים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי-בית באותו יום.
 א. אלעד הכין ביום מסויים שעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של θ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
 ב. מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $-\theta$ על סמך התצפית.
 ג. משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1, 1, 3, 1, 5.
 מצאו אומדן נראות מקסימלית ל- $-\theta$ על סמך המדים הללו.
 ד. מצאו באופן כללי אומדן נראות מקסימלית ל- $-\theta$, על סמך מוגם של n בני נוער – X_1, \dots, X_n .

5) הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות² σ לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מקסימלית עבור השונות על סמך מוגדים X_1, \dots, X_n מהתכיפות מהאוכלוסייה.

ב. נדגומו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 165, 182, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

6) פתחו אומד נראות מקסימלית לפרמטר μ בהתפלגות הבינומית, על סמך מוגדים בגודל n , בו X הוא מספר ההצלחות במדוגם.

7) X הוא משתנה מקרי בעל פונקציית הצפיפות: $f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

א. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ על סמך n תכיפות בלתי תלויות: X_1, \dots, X_n .

ב. מצאו אומד נראות מקסימלית ל- θ^2 .

8) בצד א' 10 כדורים שחורים ו-10 לבנים ובצד ב' 5 כדורים שחורים ו-15 לבנים. דוגמים באקראי כדור, בלי לדעת מאיזה צד.

א. מצא אומד נראות מקסימלית לכך שמננו הוציא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב. מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

9) הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשbez מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמשה תשbezים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א. מה אומדן הנראות המקסימלית לתוחלת זמן הפתרון של תשbez על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב. מה אומדן הנראות המקסימלית לסיכוי שיקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

10) מספר הלקוחות המתאימים בתור במקוד טלפוני הוא משתנה מקרי X , בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ , באופן הבא:

2	1	0	X
$1 - 4\theta + 4\theta^2$	$4\theta - 8\theta^2$	$4\theta^2$	$P(X)$

בחמשה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו: 0, 0, 1, 0, 0 ל叩חות מתאימים בתור.

א. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית עבור הפרמטר θ , על-סמך המדגם הנוכחי.

ב. מצאו אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לסיכוי שלא יהיה ל叩חות בתור.

11) אדם מחזיק بيדו שני מטבעות: מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן – שהסיכוי לקבל בו תוצאה של עז הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לכך כמה פעמים הוא קיבל עז. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל: את הוגן או את זה שאינו הוגן.

א. מצא אומדן בשיטת הנראות המקסימלית לשוג המטבע שהוטל.

ב. מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עז?

12) מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה. דוגמנים 50 אנשים אקראים ומתקבל ש-4 מהם מובטלים. א. מצא אומדן נראות מקסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה. ב. מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה. ג. מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

13) במשחק מחשב שלוש רמות משחק:

ברמה 1 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.9.

ברמה 2 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.7.

ברמה 3 הסיכוי של יוסי לסיים את המשחק הוא 0.4.

יוסי בחר ברמה מסוימת, אך אינו יודע באיזו רמה הוא בחר. הוא משחק במשחק ברמה שבחר פעמיים.

א. חցיאו א.ג.מ. לרמה של המשחק שיויסי שיחק, על סמך מספר הפעמים ששסיים את המשחק.

ב. אם יוסי סיים את שני המשחקים, מה יהיה האומדן לרמה?

ג. מהו א.ג.מ. לסייע, שמתוך שני משחקים הוא יכול לבדוק משחק אחד?

(14) X_1, X_2, \dots, X_n מתפלגים אחיד בקטע: $[-\theta, \theta]$.
מצא אומדן נראות מקסימלית עבור θ .

(15) X_1, X_2, \dots, X_n מתפלגים בדיד לפי פונקציית ההסתברות הבאה:

$$P(X=k) = \frac{\binom{2}{k} \cdot P^k \cdot (1-P)^{2-k}}{1-(1-P)^2} \quad K=1,2$$

הוכש שא.נ.מ ל- P , הינו: $2 - \frac{2}{X}$

(16) במכשיר חשמלי יש 2 סוללות שפועלות באופן ב"ית זו בזו, והוא מפסיק לפעול ברגע שאחת הסוללות מפסיקת לעבוד. הסיכוי של סוללה לתפקד לפחות חודש הוא P . כאשר המכשיר מפסיק לפעול מחליפים את שתי הסוללות שלו. בתחילת הניסוי נלקחו 80 מכשירים כאלה עם סוללות חדשות ולאחר מכן נמצא ש-30 מהם עדין פועלם.

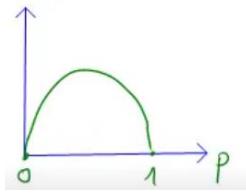
- א. מצא אומדן נראות מקסימלית עבור P .
- ב. רשמו את האומדן שבו השתמשתם בחלק א' באופן כללי, עבור מדגם של n מכשירים שמתוכם נמצאו Y מכשירים שעדיין פועלים לאחרחודש אחד.
- ג. בהנחה שאורך החיים (בחודשים) של סוללה בודדת הוא מעריכי, עם פיאריפוט: $f(t) = \theta e^{-\theta t}$ עבור $t > 0$.
מצא א.נ.מ. עבור θ , המבוסס על Y .
מהו האומדן המתאים מן המדגם הנוכחי?

(17) חיוג אוטומטי של מכשיר טלפון משדר אותה לשתי דקוט. אם לאחר 20 דקות (10 אוטות חיוג) המספר שאליו מטלפנים עדין תפוס, החיוג האוטומטי נפסק.

- א. רשמו את פונקציית ההסתברות של המשתנה X – מספר הפעמים שהחייג האוטומטי מחייב למספר הטלפון המבוקש, אם ההסתברות לקבלת צליל "פנוי" בשידור אחד של אות חיוג הוא P .
- ב. מתוך 12 ניסיונות חיוג אוטומטי למשרד הרישוי בזמנים שונים במשך 5 ימים, התקבלו התוצאות הבאות: שני ניסיונות הופסק החיוג האוטומטי ובשאר הניסיונות שבהם הצליח המטלפון להשיג את המספר המבוקש, מספר החיויגים האוטומטיים עד לקבל צליל "פנוי" היו: 1, 2, 2, 3, 7, 6, 1, 2, 8, 3, 5.
- מצאו אומדן נראות מקסימלית עבור P , על סמך התוצאות שהתקבלו.

תשובות סופיות:

$$\text{להלן גרף:} \quad . L(p) = (1-p) \cdot p \quad \text{(1)}$$



$$\text{ג. } \frac{2}{9} \quad \text{ב. } 0.5 \quad \text{(2)}$$

$$\text{ב. } \bar{X} \quad \text{א. } X \quad \text{(3)}$$

$$\text{ב. } \frac{2}{9} \quad \text{א. } \frac{1}{\bar{X}} \quad \text{(4)}$$

$$\hat{\theta} = \max \{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{ז. } 3 \quad \text{ג. } 1 \quad \text{(5)}$$

$$\text{ב. } 40.2 \quad . \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 170)^2}{n} \quad \text{א. } 1 \quad \text{(6)}$$

$$\cdot \left(\frac{n}{\sum X_i^2} \right)^2 \quad \text{ב. } \frac{n}{\sum X_i^2} \quad \text{א. } \frac{x}{n} \quad \text{(7)}$$

$$\text{ב. } \text{CDF} \quad \text{א. } \text{ראה סרטון.} \quad \text{(8)}$$

$$\text{ב. } 0.3916 \quad \text{א. } 32 \quad \text{(9)}$$

$$\text{ב. } 0.81 \quad \text{א. } 0.45 \quad \text{(10)}$$

$$\text{ב. } \text{הוון.} \quad \text{א. } \text{ראה סרטון.} \quad \text{(11)}$$

$$\text{ב. } 0.92 \quad \text{א. } 0.08 \quad \text{(12)}$$

$$\hat{p} = \begin{cases} 2 \cdot 0.4 \cdot 0.6 & X = 0,1 \\ 2 \cdot 0.9 \cdot 0.1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{ג. } 1 \quad \hat{\theta} = \begin{cases} 3 & X = 0,1 \\ 1 & X = 2 \end{cases} \quad \text{א. } (13)$$

$$\cdot \max |X_i| \quad \text{(14)}$$

(15) שאלת הוכחה.

$$\cdot 0.49 \quad \hat{p} = \sqrt{\frac{y}{n}} \quad \text{ב. } 0.6124 \quad \text{א. } (16)$$

$$\cdot 0.1818 \quad \text{ב. } P(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} p & 1 \leq x \leq 9 \\ (1-p)^9 & x = 10 \end{cases} \quad \text{א. } (17)$$

נספח:
התפלגיות רציפות

ההתפלגות	פונקציית הצפיפות	פונקציית ההסתברות	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
$X \sim U(a, b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$		$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$(b-a)^2 / 12$	$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$
$X \sim \exp(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$		$1 - e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	זמן עד להתרחשות מאורע מסוים. λ - הוא מכזע האירועים ביחידת זמן.	$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\Phi(t)$	μ	σ^2	$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$	$\bar{\mu} = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

התפלגיות בדידות

ההתפלגות	פונקציית ההסתברות $P(X = k)$	תוחלת	שונות	הערות	אנ"מ
бинומית $B(n, p)$ $0 \leq p \leq 1$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$	(1)	$\hat{P} = \frac{Y}{n}$
גיאומטרית $G(p)$ $0 < p \leq 1$	$(1-p)^{k-1} p$ $k = 1, 2, \dots, \infty$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	(2)	$\hat{P} = \frac{1}{\bar{X}}$
אחדית $U(a, b)$	$\frac{1}{b-a+1}$ $K = a, \dots, b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$	(3)	$b = \max(X_i)$ $a = \min(X_i)$
פואסונית $P(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ $k = 0, 1, \dots, \infty$	λ	λ	(4)	$\hat{\lambda} = \bar{X}$

(1) מספר ההצלחות ב- n ניסויי ברנולי ב"ת. p - ההסתברות להצלחה.

(2) מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה בסדרת ניסויי ברנולי ב"ת, p - ההסתברות להצלחה.

(3) בחירה אקראית של מספר בין a ו- b .

(4) מספר אירועים ביחידת זמן, λ - קצב האירועים.

קriterion MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קriterion MSE :

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

כאשר : $V(\hat{\theta})$ - הינה שונות האומד.

$E(\hat{\theta}) - \theta$ - הינה ההטיה של האומד.

אם T_1 ו- T_2 הינם אומדים לפרמטר θ , האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר.

כלומר, אם : T_1 עדיף על T_2 , אז $MSE(T_1) > MSE(T_2)$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון משתנה X המתפלג אחיד רציף באופן הבא : $X \sim U(3, \theta)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת : $T_1 = 2X - 3$ ו- $T_2 = \frac{3X - 3}{2}$

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר θ ?

שאלות:

- 1)** מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת. מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפויות וממוצע של שלוש תצפויות. לפי קритריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.
- 2)** בעיר מסוימת בשוויצ' בכל θ דקוטר רכבת מגיעה לתחנה מסוימת. דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - X .
- הצע אומד חסר הטיה $-\theta$, על סמך X .
 - סטטיטיκאי הציע לאמוד את θ על סמך האומד: $X \cdot 1.5$. האם האומד הנ"ל מوطה?
 - איזה אומד מבין האומדים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?
- 3)** חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלוות במחלה השפעת בחורף (להלן: הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי X - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. הוא מתלבט בין שני אומדים:
- $$T_2 = \frac{X+1}{7} \text{ ו- } T_1 = \frac{X}{5}$$
- מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?
 - מי מבין האומדים עדיף אם $P = 0.5$?
 - מי מבין האומדים עדיף אם $P = 0.1$?
- 4)** מספר השירות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת λ . נלקח מוגם של 10 חודשים אוקטובר. להלן שני אומדים אפשריים:
- $$\hat{\lambda}_2 = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^5 X_i + 2 \cdot \sum_{i=6}^{10} X_i}{10} \text{ ו- } \hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$$
- כאשר: X_i = מספר השירותות בחודש אוקטובר ה- i . איזה מהאומדים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר λ ?
- 5)** הוכח ש: $E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$

תשובות סופיות:

- (1) שלוש תצפיות.
(2) א. $2x$.
 ב. אומד מوطה.
 ג. סעיף ב.
(3) א. T_1 .
 ב. T_2 .
 ג. T_1 .
(4) $\hat{\lambda}_1$.
(5) שאלת הוכחה.

אומד עקיב:

רעיון:

יהי $\hat{\theta}_n$ אומד לפרמטר θ , המtabסס על n תצפיות.

אומד זה יקרא אומד עקיב, אם יתקיים ש: $\hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$ ומתקיים ש:

אווי $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל- θ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסביר מדוע \bar{X} אומד עקיב ל- μ .

אם $\hat{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$, מתקיים ש: אומד נראות מקסימלית לפרמטר θ ,

כלומר, $\hat{\theta}_n$ אומד עקיב ל- θ .

דוגמה (פתרון בהקלטה):

הסביר מדוע בהטפלגות גיאומטרית $\frac{1}{\bar{X}}$, אומד עקיב לפרמטר P .

שאלות:

1) נתון כי: $i=1,2,\dots,n$, כאשר: $X_i \sim U(0, \theta)$

\bar{X} מוצע להיות האומד ל- $-\theta$.

- א. הראה שאומד זה הוא חסר הטיה.
- ב. הסבר מדוע האומד הינו עקייב.

2) נתון ש- $\hat{p} = \frac{X}{n}$. כמו כן, נתון ש: $X \sim B(n, p)$ הינו אומד ל- $-p$.
הוכח שאומד זה הינו אומד עקייב ל- $-p$.

3) אורץ חיי נורה מתפלג מעריכית עם קצב λ לשנה.

נגידר את: W_1, W_2, \dots, W_n סדרת זמנים (בשנים) של n נורות בלתי תלויות.

- א. מהו אומד הנראות המקסימלי עבור λ ? האם האומד עקייב?
- ב. מצא אומד עקייב לסיכוי שנורה כלשהי תישраф תוך פחות מושתפים.

4) נפח החלב בקרטון חלב מתפלג נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2 .
מצא אומד עקייב לפרמטר σ^2 , המtabסס על n תצפיות בלתי תלויות.

תשובות סופיות:

1) א. שאלת הוכחה.
ב. ראה סרטון.

2) שאלת הוכחה.

$$\text{ב. } 1 - e^{-\frac{2}{\bar{W}}} \quad \text{א. } \frac{1}{\bar{W}} \quad \text{(3)}$$

$$\text{. } \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad \text{(4)}$$

שאלות מסכימות:

שאלות:

- 1)** בפעל מייצרים מוצריים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות. במכונה הראשונה הסיכוי ש מוצר יהיה תקין הוא P , במכונה השנייה ההסתברות ש מוצר יהיה תקין הוא P^2 ובמכונה השלישית הסיכוי הוא P^3 . דוגמנים 20 מוצרים מכל מכונה.
- נסמן ב- X את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה הראשונה, ב- Y את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה ו- Z את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.
- א. מהם הערכיים האפשריים של הפרמטר P ?
 ב. מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר P , על סמך X ו- Z .
 ג. אם התקבל ש- $3 = Y = X - 6$, מהו אומדן נראות מקסימלית ל- P ?
- 2)** מספר תאונות הדרכים בקטע כבישAi מתפלג פואסונית עם קצב של λ תאונות בחודש, ומספר תאונות הדרכים בקטע כבישBi מתפלג פואסונית עם קצב של λ תאונות בחודש. הוחלט לספור את כמות התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש. נסמן ב- X את מספר התאונות בחודש בקטע Ai וב- Y בקטע Bi.
- א. מצאו אומד נראות מקסימלית לפרמטר λ , על סמך X ו- Y .
 ב. מצאו אומד נראות מקסימלית, לשיקוי שבקטע כביש Ai תהיה לפחות תאונה אחת בחודש.
 ג. האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- λ ?
- 3)** זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמלית, עם תוחלת ושונות שאין ידועות.
- א. הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.
 ב. הציעו אומדי נראות מקסימלית לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.
 ג. הציעו אומד נראות מקסימלית לريبוע התוחלת של זמן הייצור.
 ד. האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

- 4) בקזינו משחק, ובו 4 תאים ממושפרים מ-1 עד 4. מפעיל המשחק שם כס' באחד מרבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע על הסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה, אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.
- יש לammo את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון: P .
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר P .

- על שיקחה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבה בתא מס' 1 ובפעמים האחרות בתא מס' 2.
- ב. מצאו אומדן ל- P על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המקסימלית.
- ג. מצאו אומד חסר הטיה ל- P . מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?
- ד. מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מקסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מס' 4 על סמך התוצאות של יעל.

5) יהיו: X_1, X_2, \dots, X_n מוגדים מוקרי מתוך ההתפלגות הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\theta-1} & 0 < x < \lambda, \theta > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. מצא אח"ה ל- λ (כאשר θ קבוע ידוע).
- ב. מצא אני'ם ל- θ (כאשר λ קבוע ידוע).
- ג. מצא אני'ם ל- λ (כאשר θ קבוע ידוע).

- 6) X - משך זמן פרסום בערוץ 2 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0, \theta)$.
- Y - משך זמן פרסום בערוץ 10 מתפלג אחיד רציף בתחום $(0, 2\theta)$.
- א. מצא אומד חסר הטיה ל- θ , המשתמש במשך זמן אקראי של פרסום בודדת בערוץ 2 ופרסום בודדת בערוץ 10.
- ב. מוצע האומד: $T_2 = X + 0.5Y$. האם האומד הנ"ל הוא חסר הטיה?
- ג. איזה אומד יותר עדיף זה של סעיף א או זה של סעיף ב?
- ד. מצא אומד נראות מקסימלית ל- θ על סמך X ו- Y .

תשובות סופיות:

.0.345 ג. $\hat{p} = \frac{x+z}{60}$ ב. $0 \leq P \leq 0.5$ א. **(1)**

. ג. כו. $1 - e^{-\frac{x+y}{3}}$ ב. $\frac{x+y}{3}$ א. **(2)**

- (3)** א. לאחר ולא התבקשם לפתח, הרי שהאומד זהה לניסחה הכללית (ראו נספה).
 ב. כנ"ל.
 ג. כנ"ל (ראו הפרק על אומד נראות מקסימלי).
 ד. לא.

.-0.167 ג. 0.389 ב. $\frac{1}{3}$ א. $0 \leq P \leq \frac{1}{3}$ **(4)**

. $\hat{\theta} = \frac{n}{n \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i}$ ב. $\hat{\lambda} = \frac{\theta + 1}{\theta} \bar{x}$ א. אח"ה יהיה :
(5) $\hat{\lambda} = X_{\max}$.

. $\hat{\theta} = \max \left\{ x, \frac{1}{2} y \right\}$ ג. ב. ב. כו. $T_1 = (x+y) \frac{2}{3}$ א. **(6)**

נספח: אומדי נראות מקסימלית ואומדי חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:

מודל בינומי

נתון מודגם של משתנה בינומי: $X \sim B(n, p)$.

$$\text{א.נ.מ עבר } p \text{ הוא: } \hat{p} = \frac{X}{n}, \text{ והוא גם א.ח.ה.}$$

מודל אחיד (בדיד)

נתון מודגם: X_1, X_2, \dots, X_n של משתנים אחידים: $X_i \sim U(1, N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

$$\text{א.נ.מ עבר } N \text{ הוא: } \hat{N} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \text{ וainoo א.ח.ה.}$$

מודל פואסוני

נתון מודגם: X_1, X_2, \dots, X_n של משתנים פואסוניים: $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

$$\text{א.נ.מ עבר } \lambda \text{ הוא: } \hat{\lambda} = \bar{X} \text{ וגם א.ח.ה.}$$

מודל גיאומטרי

נתון מודגם: X_1, X_2, \dots, X_n של משתנים גיאומטריים: $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

$$\text{א.נ.מ עבר } p \text{ הוא: } \hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}, \text{ ainoo א.ח.ה. א.נ.מ עבר התוחלת } \frac{1}{p}, \text{ הוא } \bar{X} \text{ והינו א.ח.ה.}$$

מודל נורמלי

נתון מודגם: X_1, X_2, \dots, X_n של משתנים נורמליים: $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

$$\text{א.נ.מ עבר } \mu, \text{ הוא: } \hat{\mu} = \bar{X}.$$

$$\text{כאשר } \mu \text{ ידוע, א.נ.מ עבר } \sigma^2 \text{ הוא: } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ (אומד חסר-הטיה).}$$

$$\text{כאשר } \mu \text{ לא-ידוע, א.נ.מ עבר } \sigma^2 \text{ הוא: } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ (אומד מוטה!!!).}$$

אומד חסר-הטיה עבר $\hat{\sigma}^2$:

$$\text{כאשר } \mu \text{ ידוע: } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

$$\text{כאשר } \mu \text{ לא-ידוע: } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

מודל מעריצי

נתון מבחן : X_1, X_2, \dots, X_n של משתנים מעריציים : $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלוים בזוגות.
 א.נ.מ עבור θ הוא : $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ - מהויה אומד מוטה, וא.נ.מ עבור התוחלת הוא \bar{X}
 א.ח.ה.

מודל אחיד (רציף)

נתון מבחן : X_1, X_2, \dots, X_n של משתנים אחידים : $X_i \sim U(0, \theta)$ בלתי-תלוים בזוגות.
 א.נ.מ עבור θ הוא : $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ אינו א.ח.ה.

בכל התפלגות:

א.ח.ה עבור μ הוא : $\hat{\mu} = \bar{X}$
 אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :
 כאשר μ ידוע : $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$
 כאשר μ לא-ידוע : $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

סטטיסטיקה

פרק 3 - רוח סמרק לתוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

29	1. רוח סמרק כchwונות האוכלוסייה ידועה
34	2. קביעת גודל מוגם

רוח סמך כשינויות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

ממוצע המדגם הוא אומד לממוצע האוכלוסייה, אך לא באמת ניתן להבין ממנו על גודלו של ממוצע האוכלוסייה. ההסתברות שממוצע המדגם יהיה בדיקות כמו הממוצע האמתי הוא אפסי.

מה שנחוג לעשות כדי לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, זה לבנות רוח סמך.

בנייה מרוחה בטחון שהסיכוי שהפרט μ ייכל בתוכו הוא: $1 - \alpha$.

$\alpha - 1$: נקרא רמת בטחון או רמת סמך. כך ש: $\alpha - 1 = P(A \leq \mu \leq B)$.

A - גבול תחתון של רוח הסמך.

B - הגבול העליון של רוח הסמך.

$L = B - A$ - אורך רוח הסמך.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חווק דגם 25 חיילים שנבחנו ב מבחון הפסיכומטרי. הוא בנה רוח סמך לממוצע הציונים ב מבחון הפסיכומטרי ב קרב אוכלוסיית החיילים ו קיבל בין 510 ל-590. רוח הסמך בונה ברמת סמך של 95%.

1. מהי אוכלוסיית המחקר?
2. מה המשתנה באוכלוסייה?
3. מה הפרט שהחווק רצה לאמוד?
4. מהו רוח הסמך?
5. מה אורך רוח הסמך?
6. מהי רמת הביטחון של רוח הסמך?

בפרק זה נרצה לבנות רוח סמך לתוחלת (μ) במקהה ש- σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה. פרמטרו אותו נרצה לאמוד: μ .

אומד נקודתי: \bar{x} .
תנאים לבניית רוח הסמך: $N \sim X$ או $n \geq 30$.

σ^2 (שונות האוכלוסייה) ידועה.

$$\text{נוסחה לרוח הסמך: } \bar{x} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

על פי נתונים היצרנו אורך חיי סוללה מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 1 שעה. מעוניינים לאמוד את תוחלת חיי סוללה. נציגו באקראי 4 סוללות, אורך החיים הממוצע שהתקבל הוא 13.5 שעות. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת אורך חיי סוללה.

$$\text{שגיאת האמידה המקסימלית: } \varepsilon = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ע - נותן את שגיאת האמידה המקסימלית, דבר שנקרה גם טעות סטטיסטית, טעות דגימה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בשימוש לשאלת עם הסוללות. מה ניתן להגיד בביטחון של 95% על שגיאת האמידה?

קשרים מתמטיים ברוח הסמך:

- אורך רוח הסמך הוא פערם שגיאת האמידה המקסימלית: $L = 2\varepsilon$.
- ממוצע המדגמים נופל תמיד באמצע רוח הסמך: $\bar{X} = \frac{A+B}{2}$.
- ככל שמספר התצפיות (n) גבוהה יותר, כך יש יותר אינפורמציה ולכן האומד יותר מדויק, ולכן מקבל רוח סמך יותר קצר.
- ככל שרמת הביטחון ($\alpha-1$) גבוהה יותר, כך: $\varepsilon = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ גבוהה יותר, ורוח הסמך יותר ארוך.

שאלות:

- 1)** חוקר התענין למד את השכר המומוצע במשק. על סמך מוגם הוא קבע שבביטחון של 95% כי השכר המומוצע במשק נع בין 9200 ל-9800 ₪.
- מי האוכלוסייה במחקר?
 - מה המשנה הנחקר?
 - מה הפרמטר שאוטו רוצים למד?
 - מה רוח הסמך לפרמטר?
 - מה רמת הסמך לפרמטר?
 - מה אורך רוח הסמך?
 - מה הסיכוי שטעות הדגימה תעלה על 300 ₪?
- 2)** מעוניינים למד את התפוקה היומית המומוצעת של מפעל מסוים ברמת סמך של 95%. בדוגמאות אקראי של 100 ימים התקבלה תפוקה ממוצעת 4950 מוצרים ביום. לצורך פתרון הנח שטית התקן האמצעית ידועה ושויה 150 מוצרים ביום. בנו את רוח הסמך.
- 3)** מעוניינים למד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרך ידוע שאורך החיים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 20 שעות. נגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
- בנו רוח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים המומוצע של מכשיר.
 - בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים המומוצע של מכשיר.
 - הסבירו כיצד ומדוע השתנה רוח הסמך.
- 4)** נגמו 200 עובדים מהמשק הישראלי. השכר המומוצע שלהם היה 9700 ₪. נניח שטית התקן של השכר במשק היא 3000 ₪.
- בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוכלת השכר במשק.
 - מה ניתן לומר בביטחון של 95% על הסטייה המרבית בין ממוצע המוגם לתוכלת השכר?
 - מה היה צריך להיות גודל המוגם אם היו רוצחים להקטין את רוח הסמך ב-50%?
 - אם היינו מגדילים את גודל המוגם ובונים רוח סמך באותה רמת סמך האם היה ניתן לטעון בביטחון רב יותר שרוח הסמך מכיל את הפרמטר?

- 5) בנו רוח סמך לממוצע הציוניים של מבחן אינטלייגנציה. ידוע שסטיטית התקן היא 15 והמדד מtabסס על 100 תוצאות. רוח הסמך שהתקבל הוא (105,99). שזרו את :
- ממוצע המדגמים.
 - שגיאת האמידה המקסימאלית.
 - רמת הסמך.
- 6) זמן החלה מאנגינה מתפלג עם סטיטית התקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- בנו רוח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
 - מה הייתה קורה לאורך רוח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגמים פי 4? הסבירו.
 - מה הייתה קורה לאורך רוח הסמך אם היו בונים את רוח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
- 7) חוקר בנה רוח סמך לממוצע וקיבל את רוח הסמך הבא : $\mu = 82$. נתון שסטיטית התקן בהתפלגות שווה ל-10 ושהמדד מtabסס על 16 תוצאות. התפלגות המשתנה היא נורמללית.
- מהו ממוצע המדגמים?
 - מהי רמת הסמך של רוח הסמך שנבנה?
 - מה הסיכוי ששגיאת האמידה באמידת ממוצע האוכלוסייה תעלה על 5?
- 8) חוקר בנה רוח סמך לתוחלת כאשר השונות בהתפלגות ידועה ברמת סמך של 95%. אם החוקר כעת יבנה על סמך אותו נתונים נתונים רוח סמך ברמת סמך קטנה מ-95%, איזה מהמשפטים הבאים לא יהיה נכון.
- אורך רוח הסמך החדש יהיה קטן יותר.
 - גודל המדגמים יהיה כעת קטן יותר.
 - הMargin בין ממוצע המדגם לקצota רוח הסמך יהיה קטנים יותר ב佗וח הסמך החדש.
 - רמת הביטחון לבנות רוח הסמך החדש תהיה קטנה יותר.

9) חוקר בנה רוח סמך ל- μ וקיבל: $48 < \mu < 54$. מה נכון בהכרח:

- א. $\mu = 51$.
- ב. $\bar{X} = 6$.
- ג. $\bar{X} = 51$.
- ד. אורך רוח הסמך הינו 3.

10) أيזה מהגורמים הבאים אינם משפיע על גודלו של רוח בר סמך, כאשר שונות האוכולוסייה ידועה (בחרו בתשובה הנכונה):

- א. רמת הבטיחון.
- ב. סטיית התקן באוכולוסייה.
- ג. מספר המשתתפים.
- ד. סטיית התקן במדגם.

תשובות סופיות:

- 1) א. העובדים במשק. ב. שכר ב-₪.
 ד. $\mu < 9800$. ג. $\mu > 9200$.
 ה. 0.95. ו. 0.600.
- 2) א. $4979.4 < \mu < 4920.6$.
 ב. 237.84. ג. 236.58.
- 3) א. ראה סרטון.
- 4) א. 95%. ב. הסטייה המרבית בין \bar{x} ל- μ היא 416 נס בביטחון של 95%.
 ג. לא. ד. 800.
- 5) א. 0.102. ב. 0.3.
 ג. 0.9544. ד. גדל.
- 6) א. 4.42. ב. יקטן פי 2.
 ג. 0.835. ד. 0.835.
- 7) א. 0.87. ב. 0.5.
 ג. 0.9544. ד. 0.9544.
- 8) א. 0.87. ב. 0.5.
- 9) א. 0.87. ב. 0.5.
- 10) א. 0.87. ב. 0.5.

קביעת גודל מוגן:

רקע:

אם מעוניינים לאמוד את ממוצע האוכלוסייה כאשר סטיטית התקן של האוכלוסייה ידועה: σ ברמת סמך של $\alpha=1$ ושיגיאת אמידה שלא עלתה על ε מסויים, נציב

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2$$

בנוסחה הבאה:

כדי להציג בנוסחה צריך שהמשתנה הנחקר يتפלג נורמלית או שהמוגן ייצא בגודל של לפחות 30 תצפיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

חברת תעופה מעוניינת לאמוד את תוחלת משקל המטען של נוסע. נניח שמשקל מטען של נוסע מתפלג נורמלית עם סטיטית התקן של 2 ק"ג. כמה נוסעים יש לדוגם אם מעוניינים שבבביחוון של 98% הסטייה המרבית בין ממוצע המוגן לממוצע האמתי לא עליה על 0.5 ק"ג? (תשובה: 87).

שאלות:

- (1)** משתנה מקרי מתפלג נורמללית עם סטיטית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רוח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא עולה על 2?
- (2)** מעוניינים לאמוד את הדופק הממוצע של מתגייסים לצבאי. מעוניינים שבביטחון של 95% שגיאת האמידה המרבית תהיה 0.5. נניח שהדופק מתפלג נורמלית על סטיטית תקן של 3 פעימות לדקה.
- כמה מתגייסים יש לדוגום?
 - אם ניקח מדגם הגדל פי 4 מהמדד של סעיף א' ונאמוד את הממוצע באותה רמת סמך כיצד הדבר ישפייע על שגיאת האמידה?
- (3)** יהיו X משתנה מקרי עם ממוצע μ וסטיטית תקן σ . חוקר רוצה לבנות רוח בר סמך ל- μ ברמת ביטחון של 0.95, כך שהאורך של הרוח יהיה $\sigma = 0.5$. מהו גודל המדגם הנדרש?

תשובות סופיות:

- (1) .780
 (2) א. 139.
 (3) . $n = 62$

סטטיסטיקה

פרק 4 - רוח סמרק לפרופורציה

תוכן העניינים

36	1. רוח הסמרק לפרופורציה
39	2. קביעת גודל מוגם

רוח הסמן לפרופורציה:

רקע:

המטרה היא לאמוד את P – פרופורציה באוכלוסייה.

האומד הנקודתי:

$$\hat{p} = \frac{y}{n} \quad Y - \text{מספר ההצלחות שבמדגם}.$$

$$\cdot \hat{p} \pm Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} : p$$

תנאי לבניית רוח סמן:

מדגם של לפחות 30 תוצאות (לעתים נתונים תנאי של מספר ההצלחות ומספר כשלונות לפחות 5 או לפחות 10).

האומד לטיעות התקן:

$$\cdot L = 2\varepsilon , \hat{P} = \frac{A+B}{2}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגו 200 אזרחים, מתוכם התקבלו ש-24 היו מובטלים.

א. בנו רוח סמן לאחוזה המובטלים באוכלוסייה ברמת סמן של 95%.

ב. מהו האומד לטיעות התקן?

שאלות:

- 1) נדגמו 200 דירות בעיר חיפה. 48 מהתוכן נמצאו כבעלות ממ"ד.
 - א. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז הדירות בחיפה עם ממ"ד.
 - ב. על סמך סעיף א' מה ניתן לומר על שגיאת האמידה המקסימאלית?
 - ג. בהנחה ובחיפה 80 אלף דירות, בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% למספר הדירות בחיפה עם ממ"ד בפועל.

- 2) במדגם של 300 אנשי היי-טק התקבל ש-180 מהם אקדמיים.
 - א. בנו רוח סמך לפרוורציה אקדמאים ברמת סמך של 95% (בקרב אנשי היי-טק).
 - ב. כיצד רוח הסמך של סעיף א' תהיה משתנה אם היינו מקטינים את רמת הסמך?
 - ג. כיצד רוח הסמך תהיה משתנה אם היינו מגדילים את גודל המדגמים?

- 3) במדגם של 400 נוהגים התקבל רוח סמך לפרוורציה הנוהגים החדשניים:

$$0.08 < p < 0.18$$
 - א. כמה נוהגים במדגם היו נוהגים חדשים?
 - ב. מהי רמת הסמך של רוח הסמך שנבנה?

- 4) במסגרת מערכת הבחירה בארה"ב נשאלו 840 אנשים עבר איזה מועמד יצביעו. 510 אנשים ענו כי יצביעו בעד ברק אובמה. בסקר פורסם שתתכן סטייה של $\pm 3\%$ מתוצאות האמת. באיזו רמת ביטחון הסקר השתמש?

- 5) במדגם של 300 נשים בגילאי 40-45 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
 - א. מצאו רוח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסייה הנחקרת.
 - ב. מצאו רוח סמך ברמה של 99% לסיcoli שבאוכלוסייה הנחקרת תמצא אישة לא נשואה?

- 6) ביצעו מדגם באוכלוסייה. שיעור ההצלחות במדגם היה 10% ורוח הסמך ניבנה ברמת סמך של 95%. אורכו הינו 8.3156%. מהו גודל המדגם שנלקח?

תשובות סופיות:

- (1) א. $18.1\% < p < 29.9\%$.
 ב. בביטחון של 95% שגיאת האמידה היא לכל היותר 0.059.
 ג. לא ניתן לדעת.
- (2) א. $0.545 \leq p \leq 0.655$.
 ב. 0.997.
 ג. לא ניתן לדעת.
- (3) א. 0.52.
 ב. 0.925.
 ג. לא ניתן לדעת.
- (4) א. 60.72% > $p > 45.91\%$.
 ב. $30.9\% > p > 22.5\%$.
 ג. לא ניתן לדעת.
- (5) א. 0.200.
 ב. לא ניתן לדעת.

קביעת גודל מוגן:

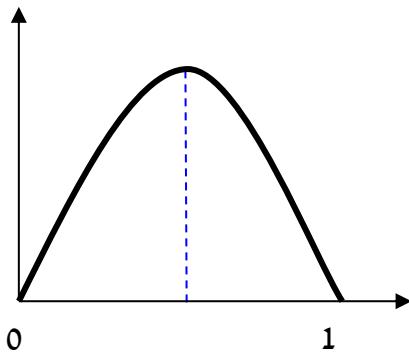
רקע:

בפרק זה נדונן איך קובעים גודל מוגן שבאים לאמוד פרופורציה באוכלוסייה מסוימת: החוקר קובע מראש את רמת הסמך הרצוי: $\alpha - 1$.

החוקר קובע מראש את הטעות הסטטיסטית המרבית שבה הוא מעוניין: ε (או את אורך רוח הסמך).

$L = 2\varepsilon$ - אורך רוח הסמך.

ε - טעות אמידה מרבית: המרחק המקסימלי (הסטטיה) בין הפרמטר (p) לאומד (\hat{p}).



$$\varepsilon = z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

ויתעניין לדעת מהו גודל המוגן הרצוי לשם כך.

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{L} \right)^2 \quad \text{נקבל ש:}$$

הבעיה שאין אנו יודעים את \hat{p} .
נתבונן בביטויי: $(\hat{p}(1-\hat{p}))$.

כיוון שאין לנו ידוע מוקדם על \hat{p} נציב את המקorra השמרני ביותר שמקסם את הביטוי עבורו: $\hat{p} = 0.5$.

$$n \geq \left(\frac{2 \cdot z_{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{0.5 \cdot 0.5}}{L} \right)^2 \Rightarrow n \geq \left(\frac{z_{\frac{1-\alpha}{2}}}{L} \right)^2$$

אך אם תהיה לנו אינפורמציה מוקדמת על הפרופורציה נציב את הערך הקרוב ביותר ל-0.5 האפשרי.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לאמוד את שיעור האבטלה במשק. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.

- מהו גודל המוגן המינימאלי שיש לקחת?
- חזור לסעיף א' אם ידוע שהابטלה לא אמורה לעלות על 20%.

שאלות:

- 1)** הממשלה אומדת מדי חדש את אחוז הتمיכה בה.
מהו גודל המדגם אשר יש לנקח אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמתי באוכלוסייה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?
- 2)** משרד התקשורת מעוניין לדעת מה שיעור בתי האב עם אינטרנט.
א. כמה בתי אב יש לדגום אם מעוניינים שבביטחון של 90% אורך רוח הסמק לא עולה על 8%?
ב. חזו על סעיף א' אם ידעו שלפניהם חמיש שנים לפחות מהתי האב היה אינטרנט וכיום יש להניח שיש יותר אינטרנט.
- 3)** עורך טלוויזיה מעוניין לאמוד את הריאטיבינג של העורך בפריים טיים. המטרה שבביטחון של 95% הסתירה המרבית בין האומדן לריאטיבינג האמתי לא תעלה על 4%.
א. כמה מכשירי PEOPLE METER יש להתקין לצורך האמידה?
ב. לפי הערכה מוקדמת הריאטיבינג של העורך לא יכול לעלות על 20%.
בהנחה וממוצע כזה עולה 500 נפש בלבד מה החיסכון הכספי
מאינפורמציה זאת?
- 4)** ענו על הסעיפים הבאים:
א. כמה אזרחים יש לדגום כדי לאמוד את אחוז הتمיכה הממשלה עם אורך רוח הסמק שלא עולה על 9% ברמת סמק של 90%?
ב. בהנחה ובוצע מדגם שאט גודלו חישבתם בסעיף א' והתבל שאותו הتمיכה הממשלה במדגם הנזקן 42%. בנו רוחה סמק לאחוז הتمיכה במדגם ברמת סמק של 95%.
ג. על סמך סעיף ב', האם תקבלו את הטענה ששיעור האוכלוסייה תומך הממשלה?
- 5)** משרד הבריאות מתכוון לבצע מדגם שמטרתו לבדוק את הסיכוי לחילות בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת. הוא מעוניין שבסיכוי של 98% טעות האמידה לא תעלה על 3%.
א. כמה מחוסנים יש לדגום?
ב. משרד הבריאות ביצע את המדגם שאט גודלו חישבת בסעיף הקודם וקיבול-ש-15% מבין אלה שקיבלו חיסון נגד שפעת בכל זאת חלו במשיך החורף בשפעת. בנו ברמת סמק של 98% את הסיכוי לחילות בחורף בשפעת עם לקיחת חיסון נגד שפעת.
ג. בהמשך לסעיף הקודם. מהי טעות האמידה המרבית בביטחון של 98%?
מדוע הוא קטן מ-3%?

תשובות סופיות:

- | | |
|---|----------------------|
| .1068 | (1) |
| .271 | ב. (2) |
| .108,000 | ב. (3) |
| .367 < p < 0.473 | ב. (4) |
| ג. בביטחון של 0.95 ניתן להגיד ששיעור האוכלוסייה תומך במשלה. | |
| א. 1509. | ב. 0.15 ± 0.02 . |
| ג. ראה סרטון. | |

סטטיסטיקה

פרק 5 - רוח סמרק להפרש פרופורציות

תוכן העניינים

1. רוח סמרק להפרש פרופורציות 42

רוח סמך להפרש פרופורציותות:

רקע:

המטרה: לאמוד את $p_1 - p_2$: הפרש פרופורציותות בין שתי אוכלוסיות שונות.

האומד הנקודתי: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.

התנאי לבניית רוח סמך: כל מבחן מעל 30 או לבדוק שמספר ההצלחות ומספר הכשלונות בכל מבחן לפחות 5 בכל מבחן (יש案אלה שבזדים לפחות 10).

$$\text{רוח סמך: } (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$$

רק שאפס נופל בתחום רוח סמך להפרש הפרופורציה נאמר שלא ניתן לקבוע שקיים הבדל מובהק בין הפרופורציות באוכלוסיות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה X, מתוכם 180 טענו שהתרופה עוזרת להם. כמו כן, נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה Y. מתוכם 150 טענו שהתרופה עוזרת להם. בנו רוח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רוח סמך על ההבדלים בין התרופות?

שאלות:

- 1)** מתיוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסויימת. מתיוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.
- בנו רוח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.
 - בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק.
- 2)** במחקר רפואי השתתפו 200 אנשים הסובלים מכאבים כרוניים. הם חולקו באקראי ל-2 קבוצות שוות בגודלן. קבוצה 1 קיבלה את תרופה A וקבוצה שנייה קיבלה את תרופה B. בקרב לוקחי תרופה A 90 טענו שמצום השתף. בקרב לוקחי תרופה B 70 טענו שמצום השתף.
- בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין שיעורי ההצלחה של שתי התרופות.
 - האם על סמך סעיף א' ניתן לקבוע שקיים הבדל בין התרופות מבחינה שיעורי ההצלחה?
- 3)** נדגמו 200 משפחות מגוש דן. ל-70% מתוכן מכשיר DVD בבית. נדגמו 300 משפחות מאזור הצפון ל-65% מתוכן מכשיר DVD בבית.
- בנו רוח סמך ברמת סמך של 98% לפרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD בבית.
 - בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין פרופורציות המשפחות בגוש דן עם DVD לבין פרופורציות המשפחות בצפון עם DVD.

תשובות סופיות:

$$\text{א. } .22.5\% < p < 31.8\% \quad \text{ב. } . -4.9\% < P_F - P_M < 14.9\% \quad (1)$$

$$\text{ב. כן. } .0.093 < P_A - P_B < 0.307 \quad \text{א. } (2)$$

$$.0.625 < p < 0.7754 \quad (3)$$

סטטיסטיקה

פרק 6 - רוח סmarketing להפרש תוחלות (ממוצעים) במדגים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1. כישרונות האוכלוסייה ידועות	44
2. כישרונות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחת שווין שווניות.....	46

כשונות האוכלוסייה ידועות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחלות: $\mu_2 - \mu_1$, כולם ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רוח סמך:

1. σ^2_1, σ^2_2 ידועות.

2. $X_1, X_2 \sim N_{n_1, n_2}$ או $n_1, n_2 > 30$.

3. שני מוגדים בלתי תלויים.

$$\text{רוח סמך: } (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רוח סמך נגיד שבביטחון של $\alpha-1$, לא קיים הבדל בין התוחלות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נדגמו 100 תושבים מאזור A והמשכורת הממוצעת הייתה ש 9200 ₪. כמו כן נdagמו 120 תושבים מאזור B וממוצע המשכורות שהתקבל ש 8700 ₪. לצורך פתרון נניח שטטיית התקן של המשכורות באוכלוסיות שני האזוריים היא 1800 ₪. אמדנו ברמת סמך של 90% את הפרש השכר הממוצע בין אזור A לאזור B.

שאלות:

- 1)** מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חילילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שצינוי הפסיכומטרי מתפלג עם נורמלilit עס טיטית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חילילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רוח סמך לפער תוחלות הצינויים בין חילילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
- 2)** צינוי IQ מתוכנים כך שיתפלגו נורמללית עם סטיטית תקן של 15. במדגם של 20 נבחנים ישראלים התקבל ממוצע צינויים 104. במדגם של 23 נבחנים אמריקאים התקבל ממוצע צינויים 99.
- א. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לפער בין ישראל לארה"ב בממוצע הצינויים בבחן IQ-ו.
- ב. האם קיים הבדל בין ישראלים אמריקאים מבחינת ממוצע הצינויים?
- 3)** חברה להנדסת בניין מעוניינת להשוות ברמת הקשיות של שני סוגי ברגים. ידוע שרמת הקשיות של ברגים מתפלגת נורמלית עם סטיטית תקן של 4 יחידות. במדגם של 15 ברגים מסווג א' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 28 יחידות ובמדגם של 12 ברגים מסווג ב' התקבל רמת קשיות ממוצעת של 25. עברו אילו רמות בטחון יקבע שאיו הבדל בין שני סוגי הברגים מבחינת ממוצע רמת הקשיות שלהם?

תשובות סופיות:

- (1)** $(-20,90)$.
- (2)** א. $\mu_1 - \mu_2 < -3.99$.
- ב. לא נוכל לטעון בביטחון של 95% שקיימים הבדל בין ישראל לארה"ב.
- (3)** רמות בטחון הגבוחות מ-0.9476.

כשונות האוכלוסייה לא ידועות ובהנחה שוויון שונויות:

רקע:

המטרה היא לאמוד את פער התוחולות: $\mu_2 - \mu_1$, כລומר ההבדלים של הממוצעים בין שתי האוכלוסיות.

האומד נקודתי: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$.

התנאים לבניית רוח סמך:

$$\cdot \sigma^2_1 = \sigma^2_2 \cdot 1$$

$$\cdot X_1, X_2 \sim N \cdot 2$$

3. מוגדים בلتוי תלויים.

השונות המשוקלلت: כיון שאנו מניחים שבין שתי האוכלוסיות השונות שווות אנו אומדים את השונות הזו על ידי שקולן שתי השונות של שני המוגדים על ידי

$$\text{הנוסחה הבאה: } S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

דרגות החופש: $d.f = n_1 + n_2 - 2$

$$\text{רוח סמך: } (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n_1+n_2-2} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$$

אם הערך אפס נופל בגבולות רוח סמך נגד שבביטחון של $\alpha - 1$, לא קיים הבדל בין התוחולות.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין תל אביב לברק שבע מבחןת הכנסה הממוצעת של אקדמיים. להלן תוצאות המוגדים שנעשתה:

טל אביב	ברק שבע	מספר האקדמאים
20	20	9500
11,000	200	250
200	200	סטיית התקן של הכנסות אקדמיים

בנו רוח סמך ברמת ביטחון של 90% להפרש תוחולות הכנסה בשני האזוריים. הניחו שהשכר מתפלג נורמלית עם אותה שוננות בכל אחד מהאזורים.

שאלות:

- 1) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו ל מבחן IQ.
להלן תוצאות המדגמים:

ארה"ב	ישראל	המדינה
15	15	גודל המדגם
1470	1560	סכום הציוניים
147,560	165,390	סכום ריבועי הציוניים

מצאו רוח סמך ברמת סמך של 95% לסתיטה בין ממוצע הציוניים בישראל לממוצע הציוניים בארה"ב. רשמו את כל הנקודות הדרושים לצורך פתרון התרגילים.

- 2) להלן 4 תוצאות על משתנה X שמתפלג: $N(\mu_x, \sigma^2)$, ומשתנה Y שמתפלג: $N(\mu_y, \sigma^2)$.

X	22	20	21	25
Y	18	25	17	12

חשבו רוח סמך ל- $\mu_x - \mu_y$ ברמת הסמך 90%, בהנחה שני המדגמים בלתי תלויים.

תשובות סופיות:

- 1) הנקודות:

1. השונות שווה.
 2. שהציוניים מתפלגים נורמלית.
 3. המדגמים אינם תלויים זה בזה.
- . $-5.52 < \mu_1 - \mu_2 < 17.52$
- . $-9.6 < \mu_y - \mu_x < 1.6$ (2)

סטטיסטיקה

פרק 7 - רוח סמרק לתוצאות (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזוגיים

תוכן העניינים

1. רוח סמרק לתוצאות (ממוצע) ההפרשים במדגמים מזוגיים 48

רוח סמך לתוחלת (ממוצע) ההפרשים במדגמים مزוגים:

רקע:

מבחן מזוג: מבחן אחד שבו יש n צמדים. כל תצפית במדגם תנפק זוג ערכים: X ו- Y . ניצור משתנה חדש: $D = y - x$.

הפרמטר שנרצה לאמוד: μ_D .

התנאים לבניית רוח הסמך:

1. $x, y \sim N$.

2. המבחן מזוג.

נוסחת רוח הסמך: $\bar{D} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$.

כאשר דרגות החופש: $df = n - 1$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בין מהירות הריצות של שתי תוכנות מחשב. נלקחו 5 קבצים אקראיים והריצו אותם בשתי התוכנות:

5	4	3	2	1	הקובץ
38	46	49	48	25	זמן בתוכנה הראשונה
48	40	42	46	27	זמן בתוכנה השנייה

הניחו כי זמני הריצות מתפלגים נורמלית.
מצאו רוח סמך של 95% להפרש תוחלת הזמן בין שתי התוכנות.

שאלות:

- 1)** נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיKA ב'. להלן הציונים בסמסטר A' ו-B':

82	75	90	68	74	Sמסטר A'
100	76	87	84	80	Sמסטר B'

- נניח שהציונים מתפלגים נורמללית.
- A. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סמסטר A' לבין סמסטר B'.
- B. האם על סמך רוח הסמך קיים הבדל בין הסמסטרים מבחינת תוחלת הציונים?
- C. מה צריך לשנות בתנאים כדי שהمدגמים יהיו בלתי תלויים?
- 2)** במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחרירים לשיחות בין"יל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקט שיחת. להלן התוצאות:

חברה/ מדינה	ארה"ב	אירופה	יפן	סין	פולין	הולנד	קנדה	ארה"ב	בזק - X
4.2	3.2	3.5	3	2.2	2.1	1.5			
4.2	3.2	3.3	3.1	1.9	2	1.4			קווי זהב - Y

בහנחה והמחקרים מתפלגים נורמלית עבור כל חברה, בנו רוח סמך ברמת סמך של 90% לתוחלת הפרש המחרירים של שתי החברות.

תשובות סופיות:

- 1)** א. $\mu_0 < 38$. ב. בביטחון של 95% לא קיים הבדל.
ג. ראה הסבר בסרטון.
- 2)** $-0.013 < \mu < 0.185$.

סטטיסטיקה

פרק 8 - רוח סמרק לשונות וסטטיות תקן

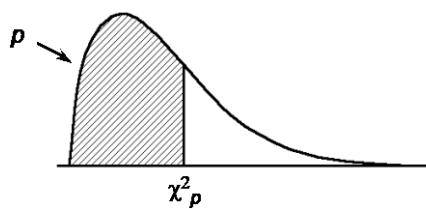
תוכן העניינים

1. רוח סמרק לשונות וסטטיות תקן.....
50

רוח סמך לשונות וסטיית תקן:

רקע:

בפרק זה נדון על בניית רוח סמך לשונות האוכולוסייה. התנאי לבניית רוח הסמך: המשטנה הנחקר מתפלג נורמלית, למורות שנhog לא לדרוש את התנאי הזה אם המדגם מספיק גדול. רוח הסמך יתבסס על התפלגות הנקראת Chi-Berry. התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס ותלויה בדרגות חופש. דרגות החופש במקרה זה יהיו: $1 - n$.



$$\text{רוח הסמך לשונות: } \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}$$

$$\text{כאשר: } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

אם נרצה לבנות רוח סמך לסטיות תקן או נוציא שורש לרוח סמך לשונות.

דוגמה:

זמן התגובה מתפלג נורמלית. במטרה לאמוד את שונות זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רוח סמך, ברמת סמך של 95%, לשונות זמן התגובה באוכולוסייה.

פתרון:

פרמטר: σ^2 .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

תוצאות מדגם: $n = 4$.

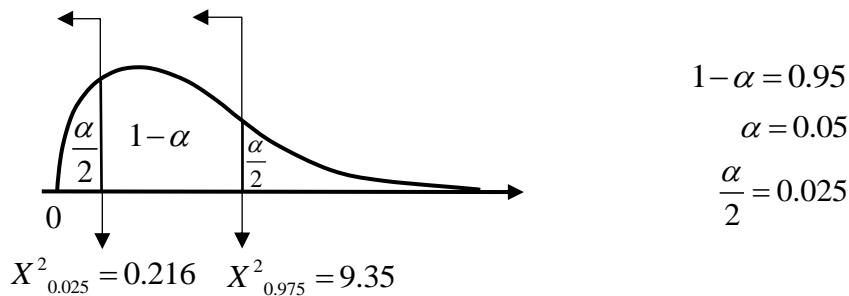
$$\bar{X} = \frac{4.7 + 5.2 + 4.6 + 5.3}{4} = 4.95$$

$$d.f = n - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1}$$

נכיב :

$$S^2 = \frac{4.7^2 + 5.2^2 + \dots + 4 \cdot 4.95^2}{4-1} = 0.123$$



$$1 - \alpha = 0.95$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

(טבלת התפלגות Chi-בריבוע מופיעה בעמוד האחרון).

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}$$

נכיב :

$$\frac{(4-1) \cdot 0.123}{9.35} < \sigma^2 < \frac{(4-1) \cdot 0.123}{0.216}$$

$$0.039 < \sigma^2 < 1.708$$

שאלות:

- 1)** חמישה מטופלים קבלו תרופה מסוימת. בדקו לכל מטופל את זמני התגובה שלו. להלן הזמנים שהתקבלו בדיקות : 28, 21, 17, 18. בהנחה וזמני התגובה מתפלגים נורמלית, בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה.
- 2)** נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי يول-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במערכות צליינס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצע 30.8 וסטיית תקן מדגםית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמלית :
- בנו רוח סמך לתוכלת הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
 - בנו רוח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בת"א ברמת סמך של 95%.
- 3)** ציוני IQ באלה"ב מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 וסטיית תקן 5. נבחנו 20 נבחנים ישראלים בבחן IQ.
- $$\sum_{i=1}^{20} X_i = 2080, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 218,220$$
- להלן התוצאות שהתקבלו :
- נניח שגם בישראל הציון נורמלית.
- מצאו אומדן ממוצע הציונים בישראל ולשונות הציונים בישראל באמצעות אומדנים חסרי הטיה.
 - אמדו ברמת ביטחון של 95% את תוכלת הציונים של נבחנים בישראל.
 - אמדו ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הציונים של נבחנים ישראלים.
 - על סמך הסעיפים הקודמים, האם בישראל ממוצע הציונים וסטיית התקן של הציונים שונה מבאה"ב? הסבירו.
- 4)** באוכלוסייה מסוימת נdagmo 10 תכפיות והתקבלו התוצאות הבאות :
- $$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750, \quad \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$
- $$\text{נתון ש: } X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$
- בנו רוח סמך ל- μ ברמת סמך של 95%.
 - בנו רוח סמך ל- σ^2 ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות:

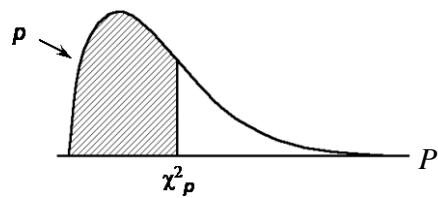
$$.8.4 < \sigma^2 < 194.2 \quad (1)$$

$$.0.836 < \sigma < 1.606 \quad \text{ב.} \quad .30.285 < \mu < 31.315 \quad (2)$$

$$.7.94 < \sigma < 13.7 \quad \text{ג.} \quad .99.32 \leq \mu \leq 108.68 \quad \text{ב.} \quad \text{א. ממוצע: } 104, \text{ שונות: } 100. \quad (3)$$

ד. בביטחון של 95% ממוצע הציונים אינו שונה, ובביטחון של 90% סטיית התקן שונה.

$$\text{ב. } 47.4 < \sigma^2 < 333.3 \quad \text{א. } 68.75 < \mu < 82.15 \quad (4)$$

נספח - טבלת התפלגות χ²-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p


df	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.04393	0.03157	0.03982	0.02393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

סטטיסטיקה

פרק 9 - שאלות מסכמת על רוחי סמרק

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמת על רוחי סמרק

55

שאלות מסכמת על רוחי סמרק:

שאלות:

- 1)** מהירות הגלישה באינטרנט במקומות מסוימים מתפלגת נורמללית. בדקו את מהירות הגלישה ב-30 זמנים אקראיים. מהירות הגלישה נמדדה ב-Mbps. מהירות מתחת -10Mbps מוגדרת על ידי החברה נМОכה. התוצאות שהתקבלו במדגים: ממוצע היה 87 עם סטיאית תקן 17 ו-12 פעמיים המהירות הייתה נМОכה.
בנו רוחי סמרק ברמת סמרק של 95% לפרמטרים הבאים:
 א. תוחלת מהירות הגלישה.
 ב. סטיאית תקן של מהירות הגלישה.
 ג. הסיכוי שמהירות הגלישה תהיה נМОכה.
- 2)** 200 אנשים נשאלו כמה פעמים ביום הם שותים כוס קפה.
להלן התפלגות התשובות:

מספר פעמים	מספר אנשים
5	10
4	20
3	22
2	28
1	34
0	86

- א. תנו רוח סמרק ממוצע מספר כוסות הקפה שאנשים נהגים לשותות ביום. $\alpha = 0.05$.
- ב. אדם השותה לפחות 4 כוסות קפה ביום נקרא "מכור לקפה". בנו רוח סמרק לאחוז "המכורים לקפה". $\alpha = 0.1$.
- 3)** חוקר בנה רוח סמרק לאחוז האנשים שהתקरרו לפחות פעם אחת בשנה. רוח הסמרק שהתקבל הוא: $m < 91$. רוח הסמרק הניל התבסס על מדגם של 500 איש.
 א. כמה אנשים במדגם טענו שככל לא התקरרו השנה?
 ב. באיזו רמת סמרק נבנה רוח הסמרק?
 ג. בנו רוח סמרק לאחוז האנשים שהתקררו לפחות פעם אחת השנה ברמת סמרק של 96% על סמך תוצאות המדגם.

4) ציוני IQ באלה"ב מתפלגים נורמלית עם תוחלת 100. במדגם של 20 ישראלים שנבחנו בבחן ה-IQ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2040, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 210740$$

- א. אמדeo ברמת ביטחון של 90% את ממוצע צינוי בחינת IQ בישראל – מהי ההנחה הדרושה לפתרון?
- ב. על סמך רוח הסמך של סעיף א' האם תקבלו את הטענה שבישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב?
- ג. מה הייתה קורה לרוח הסמך אם היו מגדילים את רמת הסמך שלו?

5) להלן תוצאות מדגם שבודק עבור כל משפחה האם יש לה בית מקשר טאבלט:

מספר משפחות בעלי טאבלט	גודל המדגם	גוש דן	אזור מגורים
168	200	240	שאר הארץ
160	168	200	גודל המדגם

- א. בנו רוח סמך להבדל בין אחוז המשפחות עם טאבלט בגוש דן ואחוז המשפחות בעלי טאבלט בשאר חלקי הארץ. ברמת סמך של 98%.
- ב. בנו רוח סמך לפרופורציות משפחות בעלות טאבלט בכלל הארץ ברמת סמך של 95%.

6) הגובה של מתגייםים לצה"ל מתפלג נורמלית במדגם של 25 מתגייםים. התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x} = 176.2\text{cm}$, $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832\text{cm}^2$.

- א. אמדeo את הגובה הממוצע של המתגייםים ברמת סמך של 98%.
- ב. אמדeo ברמת סמך של 90% את סטיית התקן של הגובה של מתגייםים של צה"ל.

7) בנק מתלבט האם לפתח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ש"ח. כמו כן, נדגו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ש"ח.

- א. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רוח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתח את הסניף. אם כן, היכן?
- ב. בנו רוח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

(8) להלן מוגם של שכר הדירה ב-ה' של 5 דירות שלושה חדרים בשכונת בבלი בתל אביב:

	שנת 2012	שנת 2013
7500	6500	7000
7700	6800	7800
7500	8200	8000
8000	8000	

בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת עליית שכר הדירה משנת 2012 לשנת 2013 בשכונת בבלוי. ניתן להניח ששכר הדירה בשכונה מתפלג נורמלית.

תשובות סופיות:

- | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------------------|-----------------|
| . $0.225 \leq p \leq 0.575$ | . $13.5 < \sigma < 22.9$ | . $80.65 \leq \mu \leq 93.35$ | . א. (1) |
| . $10.85\% \leq p \leq 19.15\%$ | . ב. | . $1.21 \leq \mu \leq 1.65$ | . א. (2) |
| . $83\% < p < 89\%$ | . ב. 0.9988 | . א. .70 | . א. (3) |
| . ג. יגדל. | . ב. לא. | . $97.4 \leq \mu \leq 106.6$ | . א. (4) |
| . $0.704 \leq p \leq 0.786$ | . ב. | . $0.5\% \leq p_1 - p_2 \leq 19.5\%$ | . א. (5) |
| . $8.8 \leq \sigma \leq 14.3$ | . ב. | . $170.8 \leq \mu \leq 181.6$ | . א. (6) |
| . $6467 \leq \mu_A \leq 7133$, $-372 \leq \mu_A - \mu_B \leq 772$ | . ב. לא. | . א. (7) | |
| | | . $-21 \leq \mu_D \leq 821$ | . ב. (8) |

סטטיסטיקה

פרק 10 - בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן)

58

בדיקת השערות כללית (סיכוי לטעויות ועוצמת מבחן):

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטי. בתחילת זה ישנן שתי השערות שנבדקות:

1. השערת האפס : המסוונת ב- H_0 .
2. השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) : המסוונת ב- H_1 .

בדרך כלל השערת האפס מסמנת את אשר היה מקובל עד עכשו, את השגרה הנורמה ואילו ההשערה האלטרנטיבית את החידשות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה.

דוגמה:

ישנה תרופה קיימת למחלת A אשר גורמת ל-10% מהמשתמשים בה לתופעות לוואי. חברת תרופות טעונה שפיתחה תרופה שיעילה באותה מידת, אך מקטינה את הסיכון לתופעות הלוואי. לכן יש לבצע מחקר שעלה סמך תוצאותיו ננסח להכריע איזה השערה קיבל:

- H_0 : התרופה החדשה הנה קונבנציונאלית וגורמת ל-10% תופעות לוואי.
 H_1 : התרופה החדשה מקטינה את אחוז הסובלים מתופעות לוואי מתחת ל-10%.

בתחילת בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל ההכרעה. הכלל יוצר אזורים:

1. אזור דחיה : דחיה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבית).
2. אזור קבלה : קבלה של השערת האפס ודחיה של האלטרנטיבית.

כל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. בתחילת יש ל选取 המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזורי הדחיה או הקבלה וכך להגיע למסקנה. המסקנה היא בעירובון מוגבל כיון שהיא תלולה בכלל ההכרעה ובהתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת, אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת.

לכן יתכונו טעויות במסקנות שלנו :

		הכרעה	
מציאות		H_0	H_1
	H_0	אין טעות 1	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון : להכריע לדחות את H_0 למקרה שבמציאות H_0 נכונה.

טעות מסוג שני : להכריע לקבל את H_0 למקרה שבמציאות H_1 נכונה.

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות) :

(לדחות את H_0) $= P_{H_0}(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{لدחות את } H_0) = \alpha$.

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2 :

(לקבל את H_0 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לקבל את } H_1) = \beta$.

רמת בטחון :

(לקבל H_0 | H_0 נכונה) $= P_{H_0}(H_0 \text{ נכונה} \mid \text{לקבל את } H_0) = 1 - \alpha$.

עוצמה :

(לקבל H_1 | H_1 נכונה) $= P_{H_1}(H_1 \text{ נכונה} \mid \text{לקבל את } H_1) = 1 - \beta = \pi$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכד יש 10 כדורים. יתכון ש-5 מהם לבנים והיתר שחורים (כד א' – השערת האפס)

או ש-7 מהם לבנים והיתר שחורים (כד ב' – השערת אלטרנטיבית).

כדי להחליט איזה מהכדים ברשותנו, הוחלט להוציא כדור ולהשתמש בכלל

ההחלטה הבאה : אם הכדור שהווצה הוא לבן שזהו כד ב' H_1 .

א. חשבו את רמת המובהקות ואת רמת הביטחון של המבחן המוצע.

ב. חשבו את הסיכוי לטעות מסוג שני והעוצמה של המבחן המוצע.

שאלות:

- 1)** אדם חשוד בביוץ פשע. מהן הטוויות האפשריות בהכרעת הדין?
- 2)**ILD קנה שקיית סוכריות אוטומת שבה ציפה ל-10 סוכריות תות ו-5 לימון. ישנה שקיית אחרת הוא לא רצה בה 6 סוכריות תות ו-9 לימון. הוא החליט להוציא באקראי סוכריה, אם היא תהיה לימון הוא יחזיר את השקיית לחנות. מה הסיכויים לכל סוג של טוות בהכרעתו?
- 3)** יהי X מספר שלם הנבחר באקראי בין המספרים השלמים. הסיכוי ש- X קיבל ערך כלשהו נתון על ידי הנוסחה: $p(X=k) = \frac{1}{n}$ עבור $k=1, 2, \dots, n$. נתונות ההשערות הבאות לגבי התפלגות של X : $H_0: n=4$, $H_1: n=6$. נדחה את השערת האפס אם: $3 > X$. כמו כן נתון כלל ההכרעה הבא: נדחה את השערת האפס אם: $3 < X$. חשבו את הסיכוי לטוות מסווג ראשון וטוות מסווג שני ואת העוצמה?
- 4)** איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד. להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:
- | מפעל / איכות | ירוד | מצוין | טוב | בינוני |
|--------------|------|-------|-----|--------|
| "היווצר" | 0 | 0.2 | 0.6 | 0.2 |
| "শמשון" | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |
- בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאייזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעול "היוצר" (השערת האפס) או במפעול "শמשון" (השערה אלטרנטטיבית).
- א. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "טוב" נקבע שהמוצר בא ממפעול "শמשון", מהן ההסתברויות לסוגי הטוויות השונים?
- ב. להלן כלל החלטה: אם מדובר במוצר שטיבו "בינוני" או גרווע מכך נקבע שהמוצר בא ממפעול "শמשון", מה מהן ההסתברויות לסוגי הטוויות השונים?
- ג. אייזה כלל החלטה עדיף? נמקו!
- 5)** במטרה לבדוק האם מטבח תקין הטילו אותו 8 פעמים. הוחלט שאם מספר העצים יהיה בין 1 ל-7 כולל יוחלט שהמטבע תקין, אחרת נחליט שהמטבע מזויף.
- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מה ההסתברות לטוות מסווג ראשון?
- ג. מהי עצמת המבחן אם למציאות אכן המטבח אינו תקין כי הסיכוי לעז בו הוא 20%.

6) להלן השערות:

$$H_0: X \sim t(5)$$

$$H_1: X \sim Z$$

כל החלטה: נדחה את השערת האפס אם X גדול מ-2.015.

א. מהי רמת המובהקות של כל ההחלטה?

ב. מהי העוצמה של כל ההחלטה?

7) במפעל מסוים נפלטים לאוויר חומרים רעילים. במצב שיגרה העוצמה הממוצעת של החומר הרעיל אמורה להיות 6,000 יחידות עם סטיית תקן 900. במצב חירום העוצמה הממוצעת היא 7,000 עם סטיית תקן 900. במפעל מערכת ההתראה נתמכת על ידי 9 חיישנים. אם ממוצע העוצמה של החומר הרUIL לפי תשעת החישנים עולה על 6,600 יחידות מופעלת מערכת ההתראה. נתון שעוצמת הזיהום מתפלגת נורמלית.

א. מה הסיכון להתראת שווא? (באיזה סוג טעות מדובר)?

ב. מה הסיכון שבמצב חירום מערכת ההתראה לא תפעל? (באיזה סוג טעות מדובר)?

ג. מה ההסתברות שאם מצב הוא מצב חירום מערכת ההתראה תפעל? (איך קוראים להסתברות זו)?

ד. בסעיפים הבאים נשנה בכל סעיף נתון מסוים. כל סעיף עומד בפני עצמו, כיצד השינוי ישנה את הסיכון לטעות מסווג ראשון ושני?

i. המפעל יקנה עוד 4 חיישנים.

ii. מצב חירום מוגדר כתוחלת של 7,500 יחידות.

iii. מערכת ההתראה תופעל אם ממוצע של תשעת החישנים יהיה מעל 6,700.

8) במטרה לבדוק האם במקומות העבודה מסוימת פרופורצית הבנים נמוכה מפרופורצית הבנות נדגמו באקראי 10 עובדים. הוחלט שאם מספר הבנים במדגם יהיה לכל היוטר 2 תתקבל הטענה שפרופורצית הבנים נמוכה מפרופורצית הבנות.

א. מה רמת המובהקות של כל ההכרעה הניל?

ב. מהי העוצמה בהנחה ובחברה 30% בניים?

9) זמן ההשפעה של משכך הכאבים "אופטלנוס" מתפלג נורמלי עם תוחלת של 40 דקות וסטיית תקן של 12 דקות. חברות התרופות המייצרת את התרופה מנסה לשפר את התרופה כך שתוחלת הזמן עד להשפעה תתקצר. לצורך כך, דגמו 25 מטופלים שקיבלו את התרופה "אופטלנוס פורטה", ממוצע זמן התגובה של המטופלים היה 34.5 דקות. חברות התרופות החליטה מראש שאם ממוצע הזמן עד להשפעה יהיה נמוך מ-35 דקות, היא תמשיך בתהליך שיוק "אופטלנוס פורטה".

- א. מהי רמת המובקות של המבחן המוצע?
- ב. על סמך תוצאות המדגם, מהי המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. מהי עצמת המבחן המוצע אם במצבת התרופה "אופטלנוס פורטה" מפחיתה את התוחלת לכדי 32 דקות?
- ד. כיצד תשנה התשובה לטעיף כי אם החברה הייתה מחייבת שהיא תמשיך בתהליך שיוק התרופה החדשה כאשר ממוצע המדגם יהיה נמוך מ-36 דקות?

10) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמליים עם סטיית תקן 120. מכון טוען של לומודים אצלם מעלים את ממוצע הציונים ביוטר מ-30 נקודות. נלקחו 20 שלמדו במכון ו-20 שניגשו לבחינה בלימידה עצמית. הוחלט במשרד פרסום לקבל את עונת המכון רק אם במדגם ממוצע הציונים של אלה שלמדו במכון יהיה גבוהה לפחות 50 נקודות מלבדו היו.

- א. מהי רמת המובקות של המחקר?
- ב. מה הסיכוי לעשות טעות מסוג שני II בהנחה שהמכון מעלה את ממוצע הציונים ב-60 נקודות?
- ג. כיצד התשובות לטעיף א ו-ב' יהיו משתנות אם משתמש שטיית התקן בציוני הפסיכומטרי הינה 100. הסבירו ללא חישוב.

11) קו ייצור נחسب תקין אם יש בו לכל היוטר 4% פגומים, ונחשב שאינו תקין אחרת. מנהל האיכות דוגם בכל יום מקו הייצור 500 מוצרים. אם במדגם יהיה לפחות 30 מוצרים פגומים יפסיק באותו היום את קו הייצור.

- א. מה ההסתברות להפסיק את קו הייצור כשהוא תקין. אין קוראים להסתברות זאת?
- ב. מה ההסתברות להמשיך ביום מסוים את קו הייצור למורות שאינו תקין כי היו 8% פגומים בקו הייצור. אין קוראים להסתברות זאת?

12) מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקובלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם עונת המחקר מתתקבלת. חוקר א' קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את עונת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בניים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?

13) מספר המכוניות הנכנסות לחניון "עזרים" מתפלג פואסוני. בשנה שעברה המכוניות נכנסו לחניון בקצב של 2 מכוניות לדקה. בעקבות תלונות על עומס יתר בכניסה לחניון מעוניין מנהל החניון לבדוק האם קצב כניסה המכוניות לחניון גדול השנה. מנהל החניון החליט לספר את מספר המכוניות שיכנסו לחניון בדקה אקראית. אם מספר המכוניות שיספרו יהיה לפחות 4 יפתח מנהל החניון שער נוסף לחניון.

א. רשמו את השערות מנהל החניון ואת כל החלטה שלו. האם כל ההחלטה הגיונית?

ב. מהי רמת המובהקות של כל ההחלטה?

ג. מהי העוצמה של כל ההחלטה, אם כיוון קצב כניסה המכוניות לחניון גדול ל-4 מכוניות בדקה?

14) עוד עוזד במבצע שבו מתחילה לעובד בשעה 00:08. עודד בדרך כלל מאוחר לעבודה ומנהל החליט לרשום את שעת הגעתו. המנהל טוען שימוש האינטגרטורי של עודד (בדיקות), X , הוא משתנה אחיד (U). עודד טוען שהוא לא מגיע באינטגרטורי נזול, אלא שהתפלגות X היא בעלת התפלגות מעריכית עם תוחלת אינטגרטורי של 20 דקות.

לבדיקה טענת המנהל (H_0) בנגד טענת עודד (H_1), המבוסס על שימוש האינטגרטורי של חגי ביום אחד. מוצאים שני כלי הבדיקה:

כלל 1: דחפה את השערת האפס אם משפט האינטגרטורי יהיה לפחות 40 דקות.

כלל 2: דחפה את השערת האפס אם משפט האינטגרטורי יהיה לכל היוטר 20 דקות. חשבו את הסיכון לטעות מסוג ראשון ושני לכל אחת מכללי ההחלטה. מי עדיף?

תשובות סופיות:

- (1) ראה סרטון וידאו.
- . $\beta = \frac{2}{5}$, $\alpha = \frac{1}{3}$ (2)
- . $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.25$ (3)
- ב. $\beta = 0.8$, $\alpha = 0.2$ (4)
- ג. כלבי.
- א. השערות : H_0 - מטבע תקין. (5)
- ב. 0.00781250 .
ג. 0.1678 .
- א. H_1 - מטבע לא תקין.
- ב. 0.022 .
ג. 0.9082 .
- א. 0.05 (6)
- ב. 0.0918 .
ג. 0.0228 . (7)
- ד. ii. α לא משתנה, β קטנה. (8)
- ד. iii. α קטנה, β גדולה. (9)
- ב. 0.383 .
ג. טעות מסוג I . (10)
- א. 0.055 .
ב. 0.3974 . (11)
- א. 0.0188 .
ב. 0.0495 . (12)
- א. 0.2981 .
ג. קטן. (13)
- א. ראה סרטון וידאו.
- (14) להלן טבלה טעויות, ממנה ניתן להסיק שככל 2 עדיף.

β	α	ככל
0.865	$\frac{1}{3}$	1
0.368	$\frac{1}{3}$	2

סטטיסטיקה

פרק 11 - מבוא לבדיקה השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

65	1. הקדמה
69	2. סוגי טעויות

הקדמה:

רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטי. בבדיקה השערות על פרמטרים עוסcid לפיה שלבים הבאים:

שלב א: נזהה את הפרמטר הנחקר.

שלב ב: נרשום את השערות המחקר. השערת האפס המסומנת ב- H_0 .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשו, את השגרה הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב- H_1 .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית בדברות על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

שלב ג: נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

שלב ד: נרשום את כל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרה כלל הכרעה. הכליל יוצר אзорים שנקרים:

1. **אזור דחיה:**

דחיה של השערת האפס כולם קבלה של האלטרנטיבית.

2. **אזור קבלה:**

קיבלה של השערת האפס ודחיה של האלטרנטיבית. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחיה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרה רמת מובהקות ומסומן ב- α .

שלב ה: בתהליך יש ל选取 תוצאות המדגם וליחס את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחיה או הקבלה.

שלב ו: להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משרד הבריאות פרסם משקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחזור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$\bar{X} = 3120, S = 280, n = 20.$$

- א. מהי אוכלוסיות המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

שאלות:**בשאלות הבאות, ענו על הטעיפים הבאים:**

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1)** ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיטית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתחה שיטה לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר לימודו בשיטתו היה 75.5.
- (2)** לפי הצהרת היিירן של חברת משקאות מסויימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיטית תקן 20 סמ"ק. אגודה הרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצחרת. במדוג שעשתה אגודה הרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדוג בגודל 25.
- (3)** במשך שנים אחדו המועמדים שהתקבלו לפיקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפיקולטה למשפטים.
- (4)** בחודש ינואר השנה פורסם שאחדו האבטלה במשק הוא 8% במדוג עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצחים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם אחדו האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

תשובות סופיות:

- ב. ציון.
- 1) א. נבחנים בברירות באנגלית.
 $H_0: \mu = 72$ ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.
 $H_1: \mu > 72$
- ב. נפח משקה בבקבוק של חברת מסויימת.
- 2) א. משקאות בבקבוק של חברת מסויימת.
 $H_0: \mu = 500$ ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.
 $H_1: \mu < 500$
- ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).
- 3) א. מועמדים לפיקולטה למשפטים.
 $H_0: p = 0.25$ ג. אחוז הקבלה.
 $H_1: p < 0.25$
- ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).
- 4) א. אזרחים בוגרים במשק.
 $H_0: p = 0.08$ ג. אחוז האבטלה ביום.
 $H_1: p \neq 0.08$

סוגי טעויות:

רکע:

בתחילת בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אзорים שנקראים:

1. אזור דחיה – דחיה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבית.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחיה של האלטרנטיבית.

כל הכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. בתחילת יש ל选取 תוצאות המדגם ולבזוק האם התוצאות נופלות באזור הדחיה או הקבלה וכן להגעה למסקנה – המסקנה היא עירובן מוגבל כיוון שהיא תלולה בכל הכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל הכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכונו טעויות במסקנות שלנו:

		הכרעה	
מציאות	H_0	H_1	
	H_0	אין טעות	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדוחות את H_0 למראות שבמציאות H_0 נכונה.
טעות מסוג שני: להכריע לקבל את H_0 למראות שבמציאות H_1 נכונה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביוץ עבירה ונتابע בבית המשפט.
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

שאלות:

- 1)** לפי הצהרת היכרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הcrcנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצחרת. במדוג שעשתה אגודת הcrcנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדוג בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להזכיר לטובת חברת המשקאות.
- רשמו את השערות המחקר.
 - מה מסקנת המחקר?
 - אייזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- 2)** במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדוחות את השערת האפס.
- אם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?
 - מה סוג הטעות האפשרית?
- 3)** לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיוום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדוגם 121 משפחות. במדוג התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדוג נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופנו מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- מהי אוכלוסיות המחקר?
 - מה המשנה הנחקרה?
 - מה הפרמטר הנחקר?
 - מה השערות המחקר?
 - מה מסקנת המחקר?
 - מי סוג הטעות האפשרית במחקר?

תשובות סופיות:

- 1)** א. $\mu = 500$.
ב. $\mu < 500$.
- 2)** א. לא ניתן לדעת.
ב. טעות מסווג ראשון.
- 3)** א. משפחות כיום.
ב. מס' הילדים.
- ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.
ה. לא לדוחות את H_0 . ו. טעות מסווג שני.
- $H_0 : \mu = 2.3$.
 $H_1 : \mu < 2.3$.

סטטיסטיקה

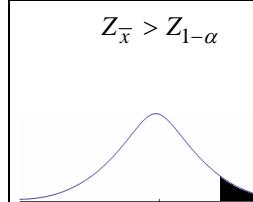
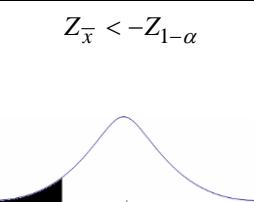
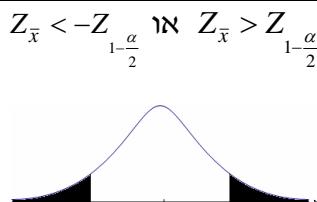
פרק 12 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כשבונות האוכלוסייה ידועה.	71
2. סיכון לטעויות ועוצמה (שבונות האוכלוסייה ידועה)	75
3. קביעת גודל מוגן (שבונות האוכלוסייה ידועה)	81
4. מובהקותות תוצאה - אלף מינימלית (שבונות האוכלוסייה ידועה)	84
5. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כשבונות האוכלוסייה לא ידועה.	89
6. מובהקותות תוצאה - אלף מינימלית (שבונות האוכלוסייה לא ידועה)	93
7. הקשר בין רוח סמך לבדיקה השערות על תוחלת (ממוצע).	96
8. ניתוח פלטים.	98

בדיקות השערות על תוחלת (ממוחע) כשבונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

$H_0 : \mu \leq \mu_0$	$H_0 : \mu \geq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:
$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	1. σ ידועה או מוגן מספיק גדול $X \sim N$.2	
$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  -דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  -דוחים את H_0	$Z_{\bar{x}} < -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$  -דוחים את H_0	כל הכרעה: אזור הדחיה של H_0

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

חלופה אחרת לכל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נתקה אם מתקיים: H_0
--	--	--	-------------------------------------

דוגמה:

יבול העגבנייהות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיוב חדשת تعالה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלוקות שזובלו בשיטה החדשת. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

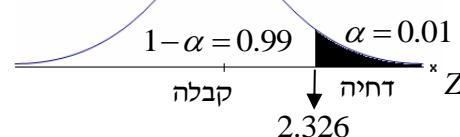
פתרונות:אוכלוסייה: עגבנייהות.המשתנה: X = יבול העגבנייהות בטון לעונה.הפרמטר: μ = תוחלת היבול בשיטה החדשת.

$$\begin{aligned} H_0 : \mu &= 10 \\ H_1 : \mu &> 10 \end{aligned}$$

תנאים:

1. $X \sim N$.

2. $\sigma = 2.5$.

כל הכלואה:נדחה את H_0 אם $Z_{\bar{x}} > 2.326$ תוצאות: $n = 4$, $\bar{x} = 12.5$

$$\text{סטטיסטי המבחן} : Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\text{נzieb} : Z_{\bar{x}} = \frac{12.5 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$$

מסקנה:לא נדחה H_0 (נקבל H_0).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטה החדשת הזיבול מעלה את תוחלת היבול של העגבנייהות.

שאלות:

- 1)** ממוצע הציונים בבחינות הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר לימודו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- 2)** לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודות היצרנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המומוצרת. במדוגם שעשתה אגודות היצרנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדוגם בגודל 25.
- מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
 - האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות גבוהה מ-5%?
- 3)** מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכילה (מאופסת). המכונה כוננה לחתווך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדוגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- 4)** המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת לצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקתיעילות הדיאטה נלקח מדגם מקורי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדוגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- 5)** לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדוגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- 6)** במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
- הגדלת רמת המובהקות לא תנסה את מסקנת המחקר.
 - הגדלת רמת המובהקות תנסה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות לא תנסה את מסקנת המחקר.
 - הקטנת רמת המובהקות תנסה את מסקנת המחקר.

7) חוקר ערך מבחן דו צדי ברמת מובהקות של α והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן דו צדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ אז בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחתה.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחתה.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

8) שני סטטיסטיקים בדקו השערות: $H_1: \mu > \mu_0$, $H_0: \mu = \mu_0$ נגדן עברו שנות ידועה ובאותה רמת מובהקות. שני החוקרים קיבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את H_0 , מה יהיה חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את H_0 , מה יהיה חוקר ב'? נמקו.

תשובות סופיות:

- 1) קיבל H_0 , בר"מ של 5% לא קיבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.
- 2) א. נדחה H_0 , בר"מ של 2.5% קיבל את תלונת אגודות הרכנים בדבר הפחיתה נפח המשקה בבקבוק.
ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדוחיה של H_0 והמסקנה לא תשתנה.
- 3) נדחה H_0 , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.
- 4) נדחה H_0 , בר"מ של 0.1 קיבל את הטענה שהדיאטה עיליה ומפחיתה את המשקל הממוצע.
- 5) קיבל H_0 , בר"מ של 0.05 נזכיר שתוחלת עובי הבורג מתיים למפרט.
- 6) א'.
- 7) ג'.
- 8) א. לדחות.
ב. לא ניתן לדעת.

סיכום לטעויות ועוצמה (שינוי האוכלוסייה ידועה):

רקע:

		הכרעה	
		H_0	H_1
מציאות	H_0	אין טעות 1	טעות מסוג 1
	H_1	טעות מסוג 2	אין טעות

הגדרת הסתברויות:

הסיכוי לבצע טעות מסוג 1 (רמת מובהקות) :
 $(\text{לדוחות } H_0 = P_{H_0} (H_0 \text{ נכונה}) | \text{ לדוחות את } H_0)$

הסיכוי לבצע טעות מסוג 2 :
 $(\text{לקבל } H_0 = P_{H_1} (H_1 \text{ נכונה}) | \text{ לקבל את } H_1)$

רמת בתרון :
 $(\text{לקבל } H_0 = P_{H_0} (H_0 \text{ נכונה}) | \text{ לקבל את } H_0)$

עוצמה :
 $(\text{לדוחות את } H_1 = P_{H_1} (H_1 \text{ נכונה}) | \text{ לדוחות את } H_0)$

התהlixir לחישוב סיכוי לטעות מסוג שני:

$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבתית:
$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$ תנאים: 1. σ ידועה 2. או מדגם מספיק גדול $X \sim N$.	
$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	כל הבדיקה: אזור הדחיה של H_0:
$P_{H_1} \left(\bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{H_1} \left(\bar{X} > \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	$P_{H_1} \left(\mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$	חישוב β:

התפלגות ממוצע המדגמים: $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$\text{התקנון: } Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

דוגמה:

בתחילת השנה חשבו הטלפון הסלולארי הממוצע לאדם היה 200 נק' עם סטיית תקן של 80 נק' לחודש. בעקבות כניסה של חברות טלפון סלולארית חדשות מעונייניות לבדוק האם כיום ממוצע חשבו הטלפון הסלולארי פחות. לצורך בדיקה דגמו באקראי 36 אנשים וחשבו הטלפון הסלולاري שלהם היה 150 נק' בממוצע לחודש.

- רשמו את השערות המחקר ובניו כלל הבדיקה במונחי חישוב ממוצע מדגמי ברמת מובהקות של 5%.
- מה מסקנתכם? איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- נניח שבמציאות ביום החשבון הממוצע הוא 160 נק'. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?
- אם נקבע את רמת המובהקות מסעיף א', כיצד הדבר ישפיע על התשובה מסעיף ג'?

פתרונות:א. אוכלוסייה: משלמי חשבון טלפון סלולאר Cioms.המשתנה : $X = \text{חשבון הטלפון החדש שקלים}$.הפרמטר : μ .

$$\begin{array}{l} H_0: \mu = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{array} \quad \text{השערות:}$$

תנאים :

$$\cdot \mu = 200 \cdot 1$$

$$\cdot n = 36 \cdot 2$$

$$\cdot \bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad K = \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$\cdot K = 200 - 1.645 \cdot \frac{80}{\sqrt{36}} = 178.07$$

כלל הבדיקה: דחה את H_0 אם שקלים $\bar{X} < 178.07$

ב. ברמת מובהקות של 5% נזכיר שאכן ממוצע חשבון הטלפון הסלולרי פחת מתחילת השנה.

$$\begin{array}{l} H_0: \mu_0 = 200 \\ H_1: \mu < 200 \end{array} \quad \text{ג. השערות:}$$

כלל הבדיקה: נדחה את H_0 אם $\bar{X} < 178.07$

$$\cdot H_1: \bar{X} \sim N\left(160, \frac{80^2}{36}\right)$$

$$Z = \frac{178.07 - 160}{\frac{80}{\sqrt{36}}} = 1.36$$

$$\beta = P_{H_1} \left(\bar{X} > 178.07 \mid H_0 \right) = P_{H_1} \left(\bar{X} > 178.07 \right) = 1 - \phi(1.36) = 1 - 0.9131 = 0.0869$$

ד. הקטנת α מגדילה את β .

שאלות:

1) נתון ש: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 1)$.

להלן השערות של חוקר לגבי הפרמטר μ : $H_0: \mu = 5$, $H_1: \mu = 7$. מעוניינים ליצור כל הכרעה המתבסס על הסמך תצפית בזדמנות כז שרמת המובייקות תהיה 5%.

א. עבור אילו ערכים של X שידגום נדחתת השערת H_0 ?

ב. מה הסיכוי לבצע טעות מסוג שני?

ג. אם במדגם התקבל ש- $X = 6.9$ מה תהיה המסקנה ומה הטעות האפשרית?

2) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטטיסטיקת תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיוון ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קרייטי ברמת מובייקות של 5%.

ב. בהמשך לסעיף א' מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחות לכדי 2.1 מהי העצמה של הכלל מסעיף א'?

3)להלן נתונים על תהליכי בדיקת השערות על תוחלת:

$n = 30$, $\sigma = 30$, $H_1: \mu \neq 200$, $H_0: \mu = 225$.

א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קרייטי וברמת מובייקות של 10%.

ב. בהמשך לסעיף א', מהי העצמה אם התוחלת שווה ל-195?

ג. הסבירו, ללא חישוב, איך העצמה תשנה אם רמת המובייקות תהיה 5%?

4) מפעל לייצור צינורות מייצרת צינור שקווטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטטיסטיקת תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בצד בדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוקית כנדרש או שקווטר הצינורות קטן מהדרוש.

א. רשמו את ההשערות ואת כלל ההכרעה ברמת מובייקות של 5%.

ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקללה והיא מייצרת את הצינורות שתקלה לא תגלה בבדיקה האיכות? כיצד נקבעת הסתברות זו?

ג. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לשעיף ב' תשנה אם רמת המובייקות גדל.

ד. הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לשעיף ב' תשנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

- 5) להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 50$, $H_1: \mu = 58$.
 מעוניינים לדגום 100 תכפיות. ידוע שטטיות התקן של ההתפלגות הינה 20.
 א. בנו כלל הכרעה שהסיכוי לטעות מסוג שני בו הוא 10%.
 מהי רמת המובהקות?
 ב. כיצד הייתה משתנה רמת המובהקות אם (כל סעיף בפני עצמו)?
 i. טטיות התקן הייתה יותר גדולה.
 ii. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול יותר.

השאלות שלහן הן שאלות רב-ברירה, בחרו בתשובה הנכונה ביותר:

- 6) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו אז:
 א. הסיכוי לטעות מסוג ראשון גדול.
 ב. העוצמה של המבחן גדולה.
 ג. הסיכוי לטעות מסוג שני גדול.
 ד. תשובות א' ו-ב' נכונות.
- 7) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסוג שני בכך:
 א. השערת האפס נכונה.
 ב. השערת האפס נדחתה.
 ג. השערת האפס לא נדחתה.
 ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.

- 8) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בבדיקה השערה:

α	$1 - \beta$
א. גדולה	קטנה
ב. גדולה	קטנה
ג. קטנה	גדולה
ד. קטנה	קטנה

- 9) נערך שינוי בכלל ההחלטה של בדיקת השערה מסוימת ובעקבותיו איזור דחיתת H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה לכך:
 א. הוא α , והוא $\beta - 1$, יקטנו.
 ב. α יישאר ללא שינוי ואילו $\beta - 1$ יגדל.
 ג. α יגדל ואילו $\beta - 1$ יקטן.
 ד. הוא α והוא $\beta - 1$ יגדל.

10) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניח של לחץ הדם בקרוב עיתונאים גבוה יותר מה ממוצע באוכלוסייה. הואלקח מדגם של 60 עיתונאים וקיים ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק של לחץ הדם בקרוב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- א. טעות מסוג ראשון.
- ב. טעות מסוג שני.
- ג. טעות מסוג שלישי.
- ד. אין טעות במסקנותו.

תשובות סופיות:

- (1) א. מעל 5.64. ב. 0.3594. ג. דחינו את H_0 , ת騰ן טעות מסוג ראשון.
- (2) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 2.24$. ב. 1. $\bar{X} < 2.24$. ג. תקתו.
- (3) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} > 203.29$ או $\bar{X} < 196.71$. ב. 0.8051. ג. תקתו.
- (4) א. נדחה H_0 אם $\bar{X} < 48.9$. ב. 0.0885. ג. תקתו. ד. תקתו.
- (5) א. 0.0033. ב. נ. רמת המובהקות הייתה קטנה. ג. נ. רמת המובהקות הייתה גדולה.
- (6) ד. נ.
- (7) ג. נ.
- (8) ג. נ.
- (9) א. נ.
- (10) ב. נ.

קביעת גודל מוגן (שינוי האוכלוסייה ידועה):

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu = \mu_1$.
 סטיטית התקן של האוכלוסייה ידועה σ ומעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות
 לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא עלה על β .

$$\text{הנוסחה הבאה נותנת את גודל המוגן הרצוי: } n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

דוגמא:

משרד החינוך מפעיל בגין חובה שיטת חינוך שפותחה בשנת 1995. לפי שיטת חינוך זו
 תוחלת הציון בבחן אוצר מילים לגיל הרך הוא 70. אנשי חינוך החליטו לבדוק
 שיטת חינוך שפותחה בהולנד הנוגנת שם תוחלת ציון אוצר מילים של 80.
 נניח שציוני מבחן זה מתפלגים נורמלית עם $\sigma = 17$.
 כדי לבדוק האם גם בישראל הפעלת שיטת החינוך ההולנדית תעבוד בגנים, רוצחים
 לבנות מחקר ברמת מובהקות של 5%. כמו כן, מעוניינים שאמ בפעולת השיטה
 ההולנדית תוחלת הציונים תעלה לכדי 80, המחקר יגלה זאת בסיכוי של 90%.
 כמה ילדי גן חובה דרושים למחקר?

פתרון:

האוכלוסייה: ילדי גן חובה.

המשתנה: X = ציון בבחן אוצר מילים.

הפרמטר: μ .

$$\text{השערות: } H_0: \mu = 70 \\ H_1: \mu = 80$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 17^2)$$

אם בפעולת השיטה ההולנדית התוחלת תעלה ל80, נגלה זאת בסיכוי 90%.

$$n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$1 - \beta = 0.9$$

$$\mu_0 = 70$$

$$\mu_1 = 80$$

$$\sigma = 17$$

$$\begin{aligned} Z_{1-\alpha} &= Z_{0.95} = 1.645 \\ Z_{1-\beta} &= Z_{0.9} = 1.282 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \geq & \left(\frac{(1.645 + 1.282) \times 17}{70 - 80} \right)^2 = 24.76 \\ \text{נכיב: } & \cdot n_{\min} = 25 \end{aligned}$$

שאלות:

- 1)** ב厰ן אינטיגנצה הציוניים מתפלגים נורמללית עם סטיית תקן 8 וממוצע 100. פסיקולוג מעוניין לבדוק את הטענה שבאוכליות במצב סוציאו אקונומי נמוך תוחלת הציוניים היא 95. אם מעוניינים לגלו את הטענה בהסתברות של לפחות 99% כشرط המובהקות היא 5% מהו גודל המדגם הדרוש?
- 2)** משרד התקשורת טוענים שאדם מדבר בממוצע 180 דקות בחודש בטלפון הסלולרי. חברות הטלפון הסלולרי טוענות שאינפורמציה זו אינה נכונה ואדם מדבר בממוצע פחות : c-160 דקות. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של זמן השיחה החדש ידוע ושווה ל-60 דקות. כמה אנשים יש לדגום כך שאם טענת משרד התקשורת נכונה אותה בסיכוי של 5% (איך קוראים להסתברות זאת?) כמו כן אם טענת חברות הטלפון הסלולרית נכונה יגלה זאת בסיכוי של 90% (איך קוראים להסתברות זאת?).
- 3)** השערות המחקר הן : $\mu_1 = \mu$, $H_0: \mu = \mu_0$. כמו כן נתון שהמשתנה מתפלג נורמלית עם סטיית התקן ידועה σ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא上升 על β . הוכיחו שגודל המדגם הרצוי לכך יהיה :
- $$\cdot n \geq \left(\frac{(Z_{1-\alpha} + Z_{1-\beta}) \times \sigma}{\mu_0 - \mu_1} \right)^2$$

תשובות סופיות:

- .41 (1)
.78 (2)
(3) שאלת הוכחה.

mobekot_tozacha - alfa_minimalit (shevona) האוכלוסייה ידועה:

רקע:

דרך נוספת להגעה להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאות :

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- p_v .
את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שייהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרונו הבא : אם $\alpha \leq p_v$, דוחים את H_0 .
mobekot_tozacha זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקייזוני מהתוצאות אלה בהנחה השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקייזוני) $\cdot p_v = P_{H_0}$

אם ההשערה היא דו צדדית :

(לקבל את תוצאות המדגם וקייזוני) $\cdot p_v = 2P_{H_0}$

mobekot_tozacha היא גם האלפא המינימלית לדחיתת השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	השערת האפס : השערת אלטרנטיביה :
$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	תנאים :	
		1. σ ידועה או מדגם מספיק גדול $X \sim N$.2	p-value

$$\text{כasher_bahenachat_shurut_hafes :} \quad Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} , \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

דוגמה:

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבע לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שהמשקל המתגייסים מתפלג נורמלית עם סטטיסטיקה של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

- מהי מובהקות התוצאה?
- מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא ?!

פתרון:

A. אוכלוסייה: המתגייסים לצבע ביום.

משתנה: $X = \text{משקל בק"ג}$.

פרמטר: μ .

השערות:
 $H_0: \mu = 65$
 $H_1: \mu > 65$

תנאים:

. $X \sim N$. 1

. $\sigma = 12$. 2

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left(\text{لتוצאות המזגם וקיצוני} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{71 - 65}{12 / \sqrt{16}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

שאלות:

- 1)** להלן השערות של מחקר: $H_0: \mu = 70$, $H_1: \mu > 70$.
 המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיטית תקן 20.
 במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות: $\bar{x} = 74$, $n = 100$.
 מהי מובהקות התוצאה?
- 2)** השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 נס' עם סטיטית תקן 2000. במדגם שנעשה אטמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 נס'. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיים חלה עלייה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלла עלייה בשכר הממוצע במשק?
- 3)** אדם חושד שהברת ממתקים לא עומדת בהתחייבותה, ומשקלו של חטייף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נזוק מ-100 גרם.
 חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבותה. ידוע כי סטיטית התקן של משקל החטייף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקלול 100 חפיפות חטייפים ולאחר מכן מכון להגיע להחלטה.
 לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
 א. רשמו את השערות המחקר.
 ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
 ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה קיבל את השערת האפס?
 ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- 4)** מכונה לחישוק מוטות בפעול חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיטית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחישוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכילה. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכו הממוצע היה 81.7 ס"מ.
 א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכירע שהמכונה לא מכילה?
 ב. אם נסייף עוד צפיפות שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
 ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכילה.
- 5)** אם מקבלים בחישובים לפחות מינימלית (value P) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

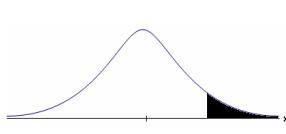
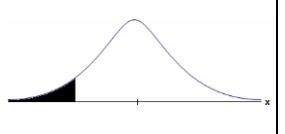
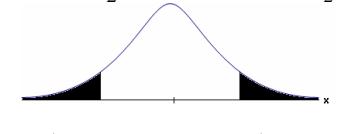
- 6) בבדיקה השערות התקבל שה- $p-value = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשמש ברמת מובהקות 1%? בחרו בתשובה הנכונה.
- יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
 - ידחה את השערת האפס מקרה.
 - ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
 - לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- 7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- רמת המובהקות המינימאלית לדחינת השערת האפס.
 - רמת המובהקות המקסימאלית לדחינת השערת האפס.
 - רמת המובהקות שנקבעה מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
 - רמת המובהקות המינימאלית לאי דחינת השערת האפס.
- 8) בבדיקה השערות מסוימת התקבל: $p value = 0.0254$ לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
 - ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
 - ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
 - ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבר כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) $H_0: \mu = 100$.
 $H_1: \mu < 100$.
- א. 0.1056. ב. 0.1056. ג. נכון.
- ד. נכريع שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006. ב. יקטן. ג. נכريع שאין כיול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

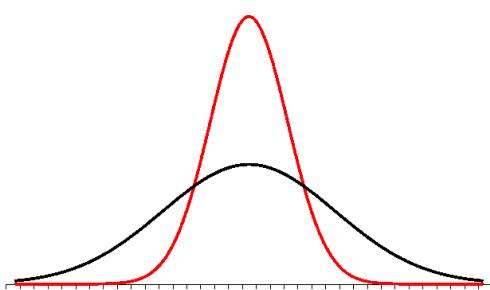
בדיקות השערות על תוחלת (ממוצע) כשבונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:
$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$	
.1. σ אינה ידועה או מוגן מספיק גבול $X \sim N$.2			תנאים:
$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha,n-1}$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha,n-1}$	$t_{\bar{x}} < -t_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}^{(n-1)}$  $-t_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}$ $t_{\frac{1-\alpha}{2},n-1}$	כל הבדיקה: אזור הדחיה של H_0:
$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{\frac{1-\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{\frac{1-\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	חלופה לכל הבדיקה: נדחה H_0 אם מתקיים:

$$\text{סטטיטיסטי המבחן: } t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

**התפלגות T:**

הינה התפלגות סימטרית בעומנית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה לתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויות במושג שנקרא דרגות החופש.

דרגות החופש הן: $df = n - 1$.

כל שדרגות החופש עלות התפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כסדרות החופש שוואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיתת תקן 0.002 ס"מ.

א. מהו השערות המתקרי?

ב. מה ההנחה הדורשה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

שאלות:

- 1)** משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסויימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחראית התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 125, 100, 95, 90, 80 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?
- 2)** משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היולדות בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההריון يولדות תינוקות במשקל נמוך מהתמוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:
- $$n = 20$$
- $$\bar{x} = 3120$$
- $$S = 280$$
- מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?
- 3)** ציוני מבחן אינטילגנציה מתפלגים נורמלית. באלה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מאשר באלה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.
- 4)** באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תכפיות והתקבלו התוצאות הבאות:
- $$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$
- $$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$
- נתון שההתפלגות היא נורמלית.
בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.

- 5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבפסו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z. רוני השתמש בטבלה של התפלגות t. מה יוכל לומר בוגר להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
 - אם רוני ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
 - שני החוקרים בהכרח הגיעו לאותה מסקנה.
 - לא ניתן לדעת על היחס בין דמיון השערת האפס של שני החוקרים.

- 6) נתון ש: $H_0: \mu = \mu_0$ ו- $H_1: \mu < \mu_0$. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ כמו נטוונות ההשעורות הבאות:
- חוקר בדק את ההשעורות הללו על סמך מדגם שככל 10 תצפיות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדוחות את השערת האפס ברמת מובייקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות וشكلל את תוצאות אלה גם למדגם כך שככל עכשו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:
- כעת ברור הוא ידחה את השערת האפס.
 - כעת הוא דוקא קיבל את השערת האפס.
 - כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

תשובות סופיות:

- 1) נדחה H_0 .
- 2) נדחה H_0 .
- 3) קיבל H_0 .
- 4) קיבל H_0 .
- 5) ב'.
- 6) ג'.

mobekot_tozacha - alfa_minimalit (shevona) האוכלוסייה לא ידועה):

רקע:

נזכיר שהמסקנה של המבחן תיקבע לפי העיקרון הבא: אם $\alpha \leq p_v$ דוחים את H_0 .
 mobekot_tozacha היא הסיכוי לקבל תוצאות המדגם וקיצוני מהתוצאות אלה בהנחה השערת האפס.
 • $p_v = P_{H_0}$ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)
 אם ההשערה היא דו צדדית:
 • $p_v = 2P_{H_0}$ (לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)

mobekot_tozacha היא גם האלפא המינימלית לדחינת השערת האפס.

$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$	השערת האפס: השערה אלטרנטיבית:	
$H_1: \mu > \mu_0$	$H_1: \mu < \mu_0$	1. σ אינה ידועה או 2. מדגם מספיק גדול $X \sim N$			
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	$2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} > \mu_0$ $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \leftarrow \bar{x} < \mu_0$			
		p-value			

$$t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$

$$d.f = n-1$$

דוגמה:

ממוצע זמן הנסיעה של אדם לעובדה הינו 40 דקות. הוא מעוניין לבדוק דרך חלופית שאמורה להיות יותר מהירה. לצורך כך הוא דוגם 5 ימים שבהם הוא נוסע בדרך החלופית. זמני הנסיעה שקיבל בדיקות הם: 34, 40, 30, 32, 27. הנicho שזמן הנסיעה מתפלג נורמלית.

- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מצאו חסמים לモבಹקות התוצאה.
- ג. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

אוכלוסייה: כלל הנסיעות לעובדה בדרך החלופית.

משתנה: $X =$ זמן נסעה בדיקות.

תנאים: $X \sim N$.

פרמטר: μ .

א. השערות:

$$\begin{aligned} H_0: \mu &= 40 \\ H_1: \mu &< 40 \end{aligned}$$

ב. תוצאות המדגם:

$$n = 5, \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{34 + 40 + \dots}{5} = 32.6$$

$$S^2 = \frac{\sum X_i^2 - n \cdot \bar{X}^2}{n-1} = \frac{34^2 + 40^2 + \dots - 5 \cdot 32.6^2}{5-1} = 23.4$$

$$S = \sqrt{23.4}$$

$$t_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{32.6 - 40}{\frac{4.88}{\sqrt{5}}} = -3.39$$

$$P_V = P_{H_0} = (\bar{X} \leq 32.6) = P(t \leq -3.39)$$

$$d.f = 5 - 1 = 4$$

$$1\% < P_V < 2.5\%$$

$P_V < \alpha = 0.05$, לכן דוחים את H_0 .

מסקנה: בר"מ של 5% נכרייע שהדרך החלופית מהירה יותר.

שאלות:

- 1)** קוו ייצור אריזות סוכר נארזות כך שהמשקל הממוצע של אריזות הסוכר צריך להיות אחד קילוגרם. בכל יום דוגמים מקו הייצור 5 אריזות במטרה לבדוק האם קו הייצור תקין. בבדיקה דגמו 5 אריזות סוכר ולהלן משקלן בגרמים: 1024, 996, 1005, 997, 1008.
- רשמו את השערות המחקר.
 - מהי מובಹקות התוצאות? הציג חסמים.
 - מה המסקנה ברמת מוב hawkות של 5%?
- 2)** חוקר בדק את הטענה כי פועלים העובדים במשמרתليل האיטיים יותר מפועלים העובדים ביום. ידוע כי משך הזמן הממוצע הדרוש לייצר מוצר מסוים ביום הוא 6 שעות. בדוגמא מיקרי של 25 פועלים שעבדו במשמרתليل נמצא כי הזמן הממוצע לייצר אותו מוצר הוא 7 שעות עם סטיית תקון של 3 שעות. מהי α -המינימלית שלפיה ניתן להחליט שancock העובדים במשמרתليل האיטיים יותר?
- 3)** הגובה של מתגייםים לצה"ל מתפלג נורמלית. בדוגמא של 25 מתגייםים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:
- $$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832, \bar{x} = 176.2$$
- מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייםים גבוהה מ-174 ס"מ באופן מובהק. מהי בקרוב מוב hawkות התוצאות ועל פייה מה תהיה המסקנה ברמת מוב hawkות של 6%?

תשובות סופיות:

- 1)** א. $H_0: \mu = 1000$ ב. $20\% \leq P_v \leq 50\%$
 $H_1: \mu \neq 1000$
- ג. ברמת מוב hawkות של 5% לא נוכל לקבוע שקו הייצור אינו תקין.
- 2)** $.10\%$
- 3)** נקבל את $H_0, 1.01$

הקשר בין רוח סמך לבדיקה השערות על תוחלת (מומוצע):

רקע:

ניתן לבצע בדיקת השערות דו צדדיות ברמת מובהקות α על μ :

$$\mu_0 : \mu = \mu_1 , H_0 : \mu \neq \mu_0$$

על ידי בניית רוח סמך ברמת סמך של $\alpha - 1$ ל- μ :

אם μ_0 נופל ברווח \leftarrow קיבל את H_0 .

אם μ_0 לא נופל ברווח \leftarrow נדחה את H_0 .

דוגמה:

חוקר ביצע בדיקת השערות לתוחלת. להלן השערותיו :

$$H_0 : \mu = 80 , H_1 : \mu \neq 80 , \alpha = 5\%$$

החוקר בנה רוח סמך ברמה של 90% וקיבל: $84 < \mu < 79$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

פתרון (פתרון מלא בהקלטה):

רוח הסמך ברמת סמך של 90% מכיל "80".

ברמת סמך של 95% רוח הסמך יגדל וכייל "80".

לכן, ברמת מובהקות של 5% קיבל H_0 .

שאלות:

- 1)** חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 90$, $H_1: \mu \neq 90$. החוקר בנה רוחח סמך לתוכלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רוחח הסמך הבא: (87, 97). אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"י רוחח הסמך? נמקו.
- 2)** חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בدم. ידוע כי מספר מיליגרים הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10.4 מ"ג. נלקח מדגם של 60 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרים סוכר היה 115.5 מ"ג לסמ"ק.
- א. בנה רוחח סמך ברמת סמך 95% לתוכלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.
- ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסייה היא 90 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א' שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבירו.
- 3)** יצרן אנטיביוטיקה רושם על גבי התרופות שכמות הפנצליין היא 200 מ"ג لكפסולה. משרד הבריאות ביצע מדגם של 8 קפסולות אקרראיות מקו הייצור ומצא שבממוצע יש 196 מ"ג פנצליין لكפסולה עם סטיית תקן מדגמית של 5 מ"ג. בהנחה וכמות הפנצליין בקפסולה מתפלגת נורמלית.
- א. בנו רוחח סמך ברמת סמך של 95% למומוצע כמות הפנצליין لكפסולה המיוצרת על ידי יצרן האנטיביוטיקה.
- ב. בדקנו ברמת מובהקות של 5% האם יש אמת באינפורמציה המופיעukt על ידי הייצן.

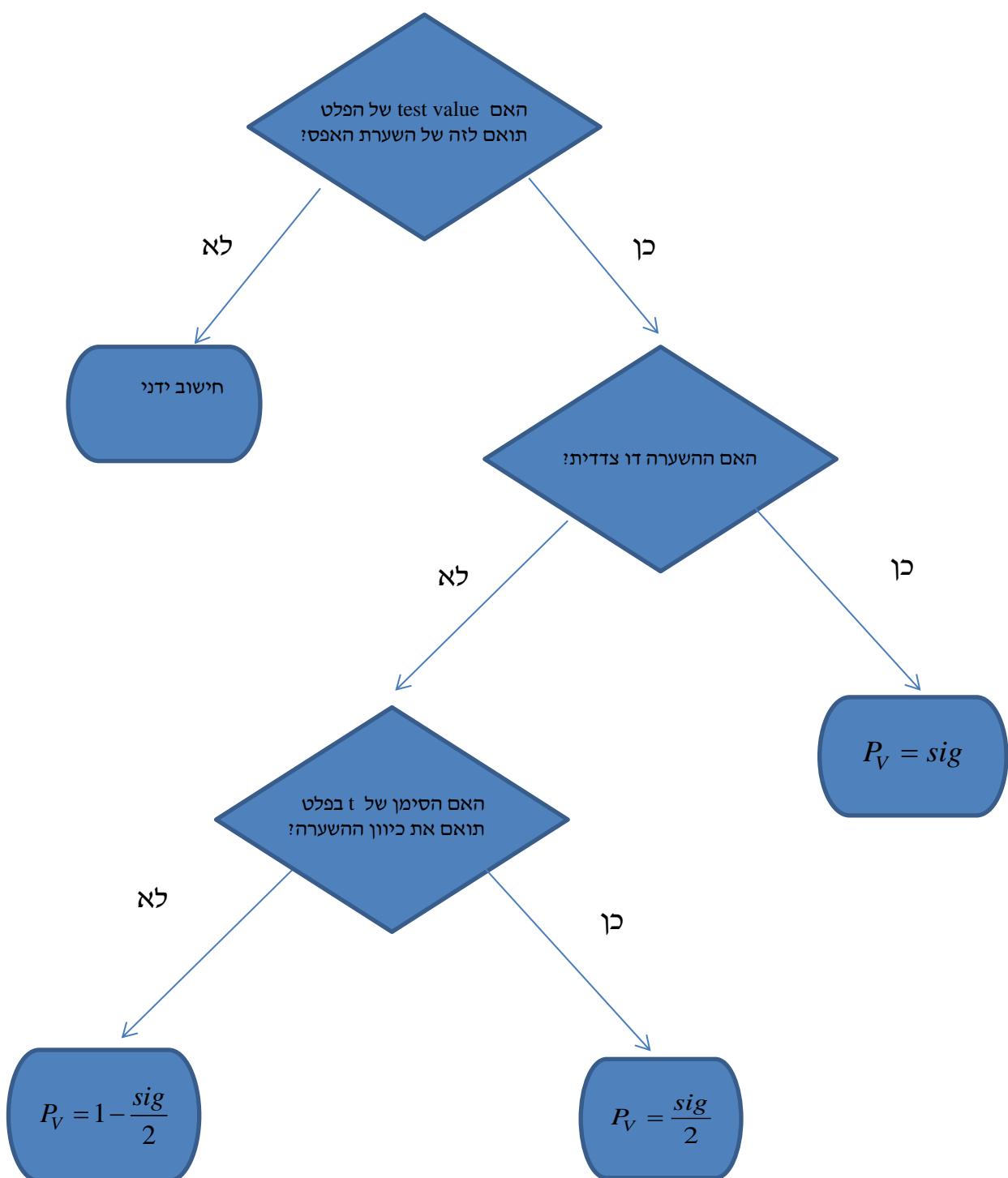
תשובות סופיות:

- 1)** קיבל השערת.
- 2)** א. $\mu \leq 118.13$.
ב. נזכיר שהדיאטה משפיעה על תוחלת רמת הסוכר בדם.
- 3)** א. $\mu \leq 200.2$.
ב. נזכיר שיש אמת בפרסום.

ניתוח פלטים:

רעיון:

חישוב מובהקות התוצאה באמצעות פלט תוכנת SPSS :



דוגמה (פתרון בהקלטה):

One-Sample Statistics

<i>X</i>	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
	25	87.6400	64.90434	12.98087

One-Sample Test

X	Test Value = 60					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean	95% Confidence Interval of the Difference	
				Difference	Lower	Upper
X	2.129	24	.044	27.64000	.8488	54.4312

ממוצע הציונים ב מבחן המיצב בחשבון הוא 60. הוחלט לדגם כייתה אקראית של 25 תלמידים ולמד אותם בשיטת לימוד חדשה.

- א. מהו רוח הסמק לVERAGE הציונים בחשבון אם יוחלט ליישם את שיטת הלימוד החדש?
- ב. מהו P_{value} לבדיקהיעילותה של שיטת הלימוד החדש?
- ג. מה יוכרע ברמת מובהקות של 5% לגבי יעילותה של שיטת הלימוד החדש?

שאלות:

- 1) באוניברסיטה גודלה גיל הסטודנטים לתואר ראשון מתפלג נורמללית. בעבר פורסם שהגיל הממוצע של הסטודנטים הינו 23. להלן פلت תוכנת SPSS על מדגם של 16 סטודנטים אקראים מתואר ראשון:

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
age	16	23.4375	2.50250	.62562

One-Sample Test

	Test Value = 23					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
age	.699	15	.495	.43750	-.8960	1.7710

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
 ב. מה ערכו של הפרמטר לפי השערת האפס?
 ג. רשום רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת גיל הסטודנטים באוניברסיטה לתואר ראשון.
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם הגיל הממוצע ביום שונה מבעבר?
- 2) קבוצת ילדים בגיל 6 קיבלה משימה לביצוע. עברו כל ילד בדקו כמה זמן לוקח לו לסיים את המשימה בבדיקות. להלן תוצאות הניתנות הסטטיסטי:

One-Sample Test

	Test Value = 4.5					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
time	-1.853	24	.076	-.09200	-.1944	.0104

- א. כמה ילדים השתתפו במחקר?
 ב. מצא רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת זמן ביצוע המשימה עברו ילדים בני 6.
 ג. מה יש להניח כדי שרוח הסמך מסעיף א' יהיה תקף?
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% שזמן ביצוע המשימה הממוצע נמור מ-4.5 דקות.

(3) להלן פלט מחשב עבור ניתוח סטטיסטי שנעשה בתוכנת SPSS. הניתוח הוא עבור מבחן אקראי של קבוצת נבחנים בבריות באנגלית.

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
grade	???	???	19.62787	2.95901

One-Sample Test

	Test Value = 75					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
grade	???	43	.017	-7.34091	-13.3083	????

- א. השלימו את הגדרים החסרים המסומנים בסמני שאלה בפלט.
- ב. מהי מובאות התוצאות לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים שונה מ-75?
- ג. מהי מובאות התוצאות לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים קטנה מ-75?
- ד. מהי מובאות התוצאות לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים גדולה מ-75?

(4) יצרו סיגריות מפרסם כי תוחלת הניקוטין בסיגריות שהוא מיצר קטנה מ-27 מ"ג. בבדיקה מקרית של 5 סיגריות מתוצרתו נמצאו כמותות הניקוטין

הבות : 21, 20, 24, 22 מ"ג.
הניחו כי כמות הניקוטין בסיגריות מפולג נורמלי.

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
nicotine	5	21.6000	1.51658	.67823

One-Sample Test

	Test Value = 27					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
nicotine	-7.962	4	.001	-5.40000	-7.2831	-3.5169

- א. האם ברמת מובהקות של 5% ניתן להסיק שיש אמת בפרסום?
- ב. אם היינו מוסיפים עוד תצפית שערך 20. כיצד הדבר היה משנה על ערך Sig ועל המסקנה?
- ג. בדקו האם ניתן להגיד שתוחלת רמת הניקוטין שונה מ-26 ברמת מובהקות של 5%.

תשובות סופיות:

- (1) א. הסקה של תוחלת אחת. ב. 23. ג. (22.104, 24.771).
- ד. נקלט H_0 .
- (2) א. 25. ב. (4.3056, 4.5104). ג. המשטנה מתפלג נורמלית.
- ד. נדחה H_0 .
- (3) א. $\bar{X} = 67.66$, $n = 44$. ב. 0.017. ג. 0.0085. ד. 0.9915.
- (4) א. נכרייע שיש אמת בפרסום. ב. המסקנה לא תשתנה.
ג. נכרייע שהתוחלת שונה מ-26.

סטטיסטיקה

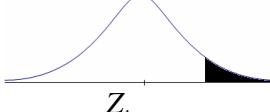
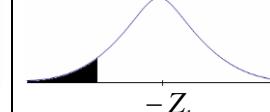
פרק 13 - בדיקת השערות על פרופורציה

תוכן העניינים

103	1. התהילה
106	2. סיכון לטעויות ועוצמה
110	3. קביעת גודל מוגם
112	4. מובהקותות התוצאה - אלף מינימלית

התהילה:

רקע:

$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	$H_0 : p = p_0$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:		
$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p \neq p_0$	תנאים: $np_0 \geq 5 \text{ \& } n(1-p_0) \geq 5$		
$Z_{\hat{p}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ H_0 -דוחים את █	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ H_0 -דוחים את █	$Z_{\hat{p}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\hat{p}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ H_0 -דוחים את █	כלל הבדיקה: אזור הדחיה: של H_0		

$$\text{סטטיסטי המבחן: } Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

חלופה אחרת לכלל הבדיקה:

כלל הבדיקה – אזור הדחיה של H_0 :		
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים.
בדקו ברמת מובהקות של 5% האם אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.

שאלות:

- 1)** במשך שנים אחזו המועמדים שהתקבל לפוקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מוג'ם של 120 מועמדים התקבלו 22. בرمת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
- 2)** במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
- 3)** הטילו מטבח 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עז. האם המטבח הוגן ברמת מובהקות של 5%?
- 4)** קפיטריה במכלה מסוימת מעירica כי אחזו הסטודנטים שוכנים קפה בקפיטריה הינו 20%. נערך סקר אשר כלל 200 סטודנטים. התברר כי 33 מהם רוכשים קפה בקפיטריה. מטרת הסקר הייתה לבדוק את אמינותה הערכה של הקפיטריה.
- רשמו את ההשערות.
 - בדקו את ההשערות ברמת מובהקות של 10%.
 - מה תהיה המסקנה אם נקטין את רמת המובהקות?
- 5)** חבר כנסת רוצה להעביר חוק. לצורך כך הוא דוגם 400 אזרחים במטרה לבדוק האם רוב האזרחים תומכים בחוק. במדגם התקבל ש-276 אזרחים תומכים בחוק.
- מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
 - אם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה אם רמת המובהקות תהיה גדולה יותר? הסבירו.
- 6)** שני חוקרים בדקו את ההשערות הבאות: $H_0: p = p_0$, $H_1: p > p_0$. חוקר א' השתמש ברמת מובהקות α_1 וחוקר ב' ברמת מובהקות α_2 החוקר הראשון דחה את H_0 ואילו החוקר השני קיבל את H_0 .
- שנייהם התבססו על אותן תוצאות של מוג'ם. בחר בתשובה הנכונה:
- $\alpha_1 = \alpha_2$.
 - $\alpha_1 > \alpha_2$.
 - $\alpha_1 < \alpha_2$.
 - המצב המתואר לא אפשרי.

תשובות סופיות:

- (1) נדחה H_0 .
- (2) נדחה H_0 .
- (3) קיבל H_0 .
- ב. נקבל H_0 .
ג. המסקנה לא תשתנה.
- ב. המסקנה לא תשתנה.
א. נדחה H_0 .
- (4) $H_0 : p = 0.2$
 $H_1 : p \neq 0.2$
- (5) ג'.
- (6) ג'.

סיכום לטיעויות ועוצמה:

רקע:

הגדרת הסטבריות:

הסיכוי לבצע טיעות מסוג 1 (רמת מובהקות) :
 $(\text{לדוחות } H_0 = P_{H_0} (H_0 \text{ נכונה}) | \text{ לדוחות את } \alpha)$

הסיכוי לבצע טיעות מסוג 2 :
 $(\text{לקבל } H_0 = P_{H_1} (H_1 \text{ נכונה}) | \text{ לקבל את } \beta)$

רמת בטחון :
 $(\text{לקבל } H_0 = P_{H_0} (H_0 \text{ נכונה}) | \text{ לקבל את } 1 - \alpha)$

עוצמה :
 $(\text{לדוחות את } H_1 = P_{H_1} (H_1 \text{ נכונה}) | \text{ לדוחות את } \pi)$

		הכרעה	
מציאות		H_0	H_1
	H_0	אין טיעות	טיעות מסוג 1
	H_1	טיעות מסוג 2	אין טיעות

התהליך לחישוב סיכוי לטיעות מסוג שני:

$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:
$np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$			תנאים:
$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} < p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\hat{p} > p_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ או $\hat{p} < p_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	כל ההכרעה: אזור הדחיה של H_0 :

חישוב : β
$P_{H_1} \left(\hat{p} < p_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$
$P_{H_1} \left(p_0 - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < \hat{p} < p_0 + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$
$P_{H_1} \left(\hat{p} > p_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$

כאשר : $\hat{P} \sim N \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right)$

וחתכנו : $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

רופא ShinNim טען כי שיעור ממחצית האוכלוסייה הבוגרת בארץ אינם מבקרים אצל רופא ShinNim באופן קבוע, כנדרש. כדי לבדוק טענה זו, נערך סקר בקרב 150 אנשים בוגרים.

- .א. רשמו את ההשערות וכלל הכרעה ברמת מובהקות של 10%.
- .ב. מהי עוצמת המבחן אם מסתבר ש 60% מהאוכלוסייה אינם מבקרים אצל רופא ShinNim באופן קבוע.

שאלות:

- 1)** משרד הבריאות פרסם ש-10% מתושבי המדינה סובלים ממחלה האסתמה. מחקר דורך לבדוק האם בחיפה, בגל זיהום האוויר, שיורט הסובלים מאסתמה גביה יותר. לצורך המחקר נבדקו 260 מתושבי חיפה.
 א. רשמו את השערות המחקר, וצרו מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקה.
 ב. מהי עצמת המבחן של סעיף א' בהנחה ובחיפה 16% מהתושבים סובלים מאסתמה?
 ג. כיצד תנסה התשובה לסעיף ב' אם מסתבר שבחיפה 18% סובלים מאסתמה?
 ד. בהמשך לסעיף א' האם נכון לומר שבנסיבות של 5% ההשערה שבחיפה 10% מהתושבים סובלים מאסתמה אינה נכונה?
- 2)** אחוז הסובלים מטופעות הלוואי מטרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מטופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
 נניח שהתרופה נבדקה אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מטופעות הלוואי ל-10%, מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?
- 3)** בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פтиחת מכלה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדול. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%.
 א. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסווג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.
 ב. כיצד התשובה לסעיף הקודם תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?
- 4)** מעוניינים לבדוק האם בפקולטה מסוימת ישנה העדפה לגברים. הוחלט לדגום 200 מתקובלים ועל סמך מספר הבנים לקבוע אם טענת המחקר מתק傍ת. חוקר אי קבע רמת מובהקות של 5% וחוקר ב' החליט לקבל את טענת המחקר אם במדגם יהיו לפחות 120 בניים. למי מבין החוקרים רמת מובהקות גדולה יותר?
- 5)** חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסווג שני בכך (בחרו בתשובה הנכונה):
 א. השערת האפס נכונה.
 ב. השערת האפס נדחתה.
 ג. השערת האפס לא נדחתה.
 ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה בהכרח.
- 6)** קבעו אם הטענה הבאה נכונה: בבדיקה השערות לא ניתן לבצע בו זמני טעות מסווג ראשון וטעות מסווג שני.

תשובות סופיות:

- .0.9015 ב. גודל. ג. טענה לא נכונה.
 $H_0 : p = 0.1$ א. $H_1 : p > 0.1$ (1)
- .0.4404 (2)
- ב. תקין. 0.1446 (3)
- (4) חוקר א'.
 (5) ג'.
 (6) נכונה.

קביעת גודל מוגן:

רקע:

השערות המחקר הן: $H_0: p = p_0$, $H_1: p = p_1$ מעוניינים לבצע מחקר שרמת המובהקות לא תעלה על α והסיכוי לטעות מסוג שני לא תעלה על β .

הנוסחה הבאה נותנת את גודל המוגן הרצוי:

$$n \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha} \sqrt{p_0 q_0} + Z_{1-\beta} \sqrt{p_1 q_1}}{p_0 - p_1} \right)^2$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

רוצים לבדוק האם אחוז האנשים השווים בשמש ללא הגנה ירד בעקבות הפרסומת על נזקי השימוש. בעבר 60% מהאוכלוסייה שהתחבשה בשמש ללא הגנה. מה גודל המוגן המינימלי שיש לקחת כדי לבדוק שהאחוז הניליל ירד ל-48% אם מעוניינים שהסתוכוי לטעות מסוג ראשון יהיה 5% והסתוכוי לטעות מסוג שני יהיה 1%?

שאלות:

- 1)** משרד התמ"ת פרסם ש אחוז האבטלה במשק היום עומד על 8%. לעומת זאת, משרד הפנים טוען ש חלה עלייה בשיעור האבטלה עד לכדי 11%. כדי לבדוק מי מבניהם צודק, מה צריך להיות גודל המדגם שייננה על שני התנאים הבאים:
- אם משרד התמ"ת צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 10%.
 - אם משרד הפנים צודק, נדחה את טענתו בסיכוי של 4%.
- 2)** מפעיל קזינו מפרסם שהסיכוי לזכות במכונות מזל הינו 0.42. אדם טוען שהסיכויים לזכות במשחק נמוכים יותר. כמה פעמים יש לשחק את המשחק כדי שאם טענת מפעיל הקזינו נכונה נקבל את טענת האדם בסיכוי של 1% ואם למציאות הסיכוי לזכות במכונה הוא 0.3 נקבל את מפעיל הקזינו בסיכוי של 8%?

תשובות סופיות:

.891 (1)

.224 (2)

МОובקהות התוצאה – אלפא מינימלית:

רקלע:

דרך נוספת להגעה להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מוביקות התוצאה: באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מוביקות התוצאה שמסומן ב- p_v . את רמת המוביקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מוביקות התוצאה החוקר יכול לחשב רק אחרי שייהו לו את התוצאות. המשקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא:

אם $p_v \leq \alpha$ דוחים את H_0 .

mobiyakot haTza'ah zeh haSicovi l'kbelat tzo'ot haMedgem v'kiitzoni matzo'ot ala b'hinchat haShurat haAfsh.

l'kbel at tzo'ot haMedgem v'kiitzoni) $\cdot p_v = P_{H_0}$.

אם ההשערה היא דו צדדית:

• $p_v = 2P_{H_0}$

mobiyakot haTza'ah hia g'm haAlfa haMinimilit laDchiat haShurat haAfsh.

השערת: הAfsh: השערה: אלטרנטיבית:	תנאים:	p-value	
$H_0: p = p_0$ $H_1: p > p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p < p_0$	$H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$	$np_0 \geq 5 \& n(1-p_0) \geq 5$
$P_{H_0}(\hat{P} \geq \hat{p})$	$P_{H_0}(\hat{P} \leq \hat{p})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \geq \hat{p}) \leq \alpha$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\hat{P} \leq \hat{p}) \leq \alpha$	

כאשר בהנחה השערת האפס: $\hat{P} \sim N\left(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n}\right)$

התקנון: $Z_{\hat{p}} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

ישנה טענה שיש הבדל בין אחוז הבנים ואחוז הבנות הפונאים ללימוד להנדסאי מחשבים. לשם כך נלקח מוגם מקרי של 200 תלמידים הלומדים מחשבים והתברר כי 112 מהם בניים.

- א. מהי מובاهקות התוצאות?
- ב. מה המסקנה ברמת מובاهקות של 5%?

שאלות:

- 1)** במשך שנים אוחז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם האמ השנה הקשו על תנאי הקבלה.
- מהי מובהקות התוצאה?
 - מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?
- 2)** נהוג לחשב ש-60% מהילדים בגיל שלוש קמים מהmittה במהלך הלילה לפחות פעם אחת. ישנה טענה שלאו שנות צהרים פחות מ-60% מהילדים בגיל זה יקומו לפחות פעם אחת במהלך הלילה. נדגו 80 ילדים בגיל 3 אשר אינם ישנים בצהרים מתוכם התקבל ש-41 קמו במהלך הלילה.
- מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה שתתקבל הטענה במחקר?
 - מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה לא תתקבל טענת המחקר?
 - עבור אילו רמות מובהקות קיבל את טענת המחקר?
 - מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 6%?
- 3)** במטרה לבדוק האם מטבח הוגן מטילים אותו 80 פעמים. התקבל ש-60 מההטלות הראו עצ. רשמו את השערות המחקר, חשבו את מובהקות התוצאה והסיקו מסקנה ברמת מובהקות של 5%.
- 4)** בבדיקה השערות על פרופורציה התקבל שה- $p-value = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשמש ברמת מובהקות 5%:
(בחרו בתשובה הנכונה)
- קיבל את השערת האפס.
 - דחה את השערת האפס.
 - לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- 5)** קבעו אם הטענה הבאה נכונה:
"בבדיקה השערות חד-צדדי התקבל ערך $p-value$ של 3%, לכן אם היינו מבצעים מבחן דו-צדדי (כאשר יתר הנסיבות ללא שינוי), היינו מקבלים ערך $p-value$ של 6%".
- 6)** במפעל 10% מהעובדים נפגעים לפחות פעם אחת בשנה מתאונות עבודה. לאור זאת, המפעל החליט לצאת בתוכנית לצמצום שיעור הנפגעים. תוכנית זו נוסתה על 100 עובדים. מתוכם 12 נפגעו בתאונות עבודה במשך השנה. מהי רמת המובהקות הקטנה ביותר עבורה יוחלט שהתוכנית יעילה?

תשובות סופיות:

(1) א. 0.0455

ב. ברמת מובהקות של 1% : לא דוחים את H_0 .ברמת מובהקות של 5% : נדחה את H_0 .

(2) א. 0.0548 ב. 0.0548 ג. מעל 0.0548

ד. נכרייע לטובת טענת המחקר.

(3) נדחה את H_0 , $p_v = 0$

(4) ב'.

(5) הטענה נכונה.

(6) 0.7486

סטטיסטיקה

פרק 14 - בדיקת השערות על הפרש פרופורציות

תוכן העניינים

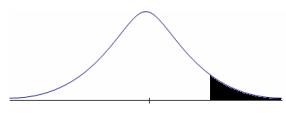
1. כללי

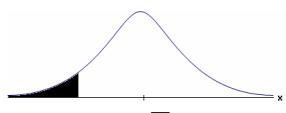
116

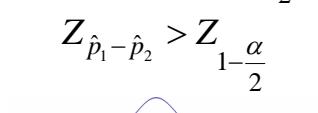
בדיקות השערות על הפרש פרופורציות

פרק

השערת האפס : השערת הnull	השערת הלא נכונה : אלטרנטיבית	תנאים :	כלל ההכרעה : אзор הדחיה של
$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 > 0$	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 < 0$	$H_0: p_1 - p_2 = 0$ $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$	1. מדגמים בלתי תלויים 2. מדגמים גדולים

$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{1-\alpha}$

 $Z_{1-\alpha}$
 H_0 - דוחים את ■

$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{1-\alpha}$

 $-Z_{1-\alpha}$
 H_0 - דוחים את ■

$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} < -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ או
 $Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} > Z_{\frac{\alpha}{2}}$

 $-Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$
 H_0 - דוחים את ■

סטטיטיסטי המבחן:

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} \underset{H_0}{=} \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

כאשר הפרופורציה המשווקלلت :

$$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

כלל ההכרעה: איזור הדמייה של H_0	
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 < 0 - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$ או
$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0 + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}$	

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N(p_1 - p_2, \frac{p_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{p_2 \cdot q_2}{n_2}) \quad : \hat{p}_1 - \hat{p}_2$$

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}}$$

תקנון:

$$Z_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 | H_0} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1} + \frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}}}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

נדגמו 80 סטודנטים שנבחנו במיקרו-כלכלה. מתוכם 60 עברו את הבדיקה.
 נדגמו 100 סטודנטים שנבחנו בסטטיסטיקה א'. מתוכם 82 עברו את הבדיקה.
 האם שיעור העוברים את הבדיקה בסטטיסטיקה גבוהה מאשר מהבדיקה במיקרו
 כלכלה? בדקו ברמת מבוקחות של 10%.

שאלות

- 1)** במדגם של 200 גברים, 8% היו מובטלים. במדגם של 180 נשים, 10% מהן היו מובטלות. האם קיים הבדל מובהק בין פروفורציה המובטלים לפרופורציה המובטלות? בדקו ברמת מובהקות של 5%.
- 2)** אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה. במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה. א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארץ? ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מהאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?
- 3)** נדגמו 500 בוגרים מתוכם 200 גברים והיתר נשים. במדגם התקבל: מתוד הגברים ל-48% تعוזת בגרות. מתוך הנשים ל-58% تعוזת בגרות. מטרת המחקר היא לבדוק האם שיעור הזכאות לבגרות גבוהה משיעור הזכאים. א. מהי מובהקות התוצאה? ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- 4)** במדגם שנערך על 100 פרות מחוות בדروم הארץ התקבל כי 20 פרות נשאות וירוס מסויים. במדגם שנערך על 200 פרות מחוות בצפון הארץ התקבל כי 10 מתוכן נשאות וירוס גם כן. א. בנזן מבחן ברמת מובהקות של 5% לבדיקת הטענה כי הוירוס תקף את פרות הדромים באופן משמעותי יותר מאשר את הפרות בצפון הארץ. ב. מהי המסקנה לבדיקת הטענה של סעיף א' ומהי הטועה האפשרית במסקנה? ג. מהי עוצמתה המבחן אם שיעור הפרות בדروم עם הוירוס גבוהה ב-10% משיעור הפרות בצפון עם הוירוס? ד. כיצד העוצמה תשתנה אם נגדיל את רמת המובהקות?

תשובות סופיות

- (1) לא נדחה את H_0 .
- (2) א. נדחה H_0 .
- (3) א. 0.0139.
- (4) א. ראה סרטון.
ב. נדחה H_0 .
ג. 0.8238.
ד. תנדל.

סטטיסטיקה

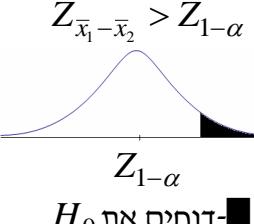
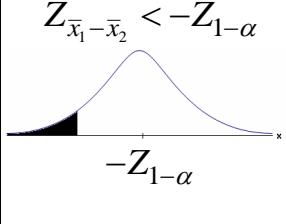
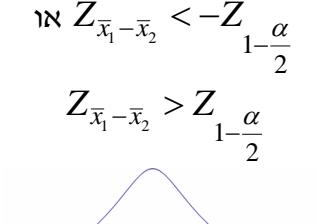
פרק 15 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגים בלתי תלויים

תוכן העניינים

1.120	כשוניויות האוכלוסייה ידועות.....
1.124	כשוניויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שוות.....
1.128	3. ניתוח פלטימ.....

בדיקות השערות על הפרש תוחלות בדוגמים בלתי תלויים

כשהשונות של האוכלוסייה ידועות – רקע

$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:
$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 \neq c$	דוגמים בלתי תלויים σ_1, σ_2 $X_1, X_2 \sim N$ או דוגמים מספיק גודולים
$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ -דוחים את H_0 ■	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ -דוחים את H_0 ■	$Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$  $-Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \quad Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ -דוחים את H_0 ■	כלל ההכרעה: אזרור הדחיה של H_0 :
			$-Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \quad Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$

סטטיסטי המבחן: $Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - c}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

חלופה אחרת לכל הכרעה:

נחתה H_0 אם מתקיים :	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - Z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	

התפלגות הפרש המומוצעים: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$$\text{התקנון: } Z_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

דוגמה (פתרו בהקלטה) :

בשנת 2004 הופיע בין השכר הממוצע של הגברים לנשים היה 3000₪ לטובת הגברים. מעוניינים לבדוק האם כיוון הצטמצם הופיע בין הגברים לנשים מבחינת השכר הממוצע. נדגומו 100 עובדים גברים. שכרם הממוצע היה 9,072 ₪. נדגומו 80 עובדים, שכרכו הממוצע היה 9,780 ₪. לצורך פתרון נניח שסטיות התקן של השכר ידועות ו שוות ל-2000₪ באוכלוסייה הנשים ו-3000₪ באוכלוסייה הגברים. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

שאלות

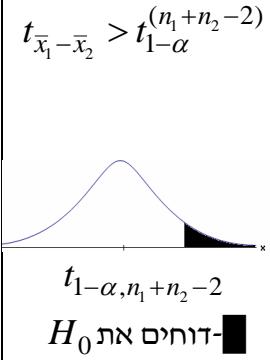
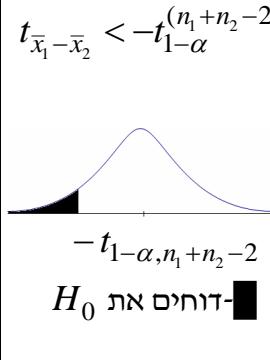
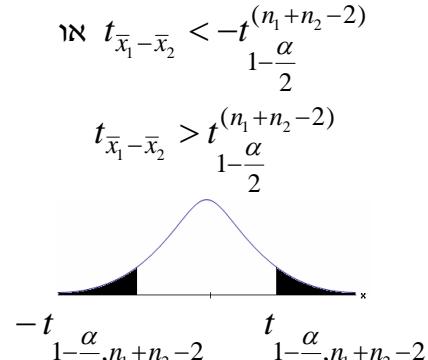
- 1) מחקר טוען שאנשים החיים במרכז הארץ צופים בממוצע בטלוויזיה יותר מאשרים שלא חיים במרכז. נדגו 100 אנשים מהמרכז ו-107 אנשים לא מהמרכז. אנשים אלה נשאלו כמה שעות ביום הם נהגים לצפות בטלוויזיה. במדגם של מרכז הארץ התקבל ממוצע 2.7 שעות. במדגם של מחוץ למרכז הארץ התקבל ממוצע 1.8 שעות. לצורך פתרון הניחו שככל אзор, סטיית התקן היא שעה 1 ביום. בדקו את טענת המחקר ברמת מובהקות של 1%.
- 2) ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית התקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו לבחן ללא הינה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הינה במכון התקבל ממוצע ציוניים 561. מה מסקנכם ברמת מובהקות של 5%.
- 3) במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה וההתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים.
א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקה האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מההתפוקה הממוצעת הלילית.
ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 8%?
- 4) במחקר מקייף שנעשה באירופה נקבע שגברים גבוהים מנשים ב-8 ס"מ ממוצע. מחקר ישראלי מתעניין לבדוק האם בישראל הפער גדול יותר. לצורך המחקר נדגו 40 גברים ו 40 נשים באקראי. כמו כן, נניח שסטיות התקן של הגברים והנשים ידועות ושותת ל-6 ס"מ אצל הנשים ו-12 ס"מ אצל הגברים.
א. מהן השערות המחקר ומהו כלל ההכרעה ברמת מובהקות של 10%?
ב. אם בישראל הפער בין גברים לנשים מבחינת הגובה הממוצע הוא 11 ס"מ, מה ההסתברות שהמחקר לא יגלה זאת? איך קוראים להסתברות זאת?

תשובות סופיות

- 1) נדחה H_0 .
- 2) לא נדחה את H_0 .
- 3) א. 0
ב. נדחה את H_0 .
- 4) א. נדחה את H_0 , אם במדגם הגברים יהיו גבוהים בממוצע מהנשים ביוטרמו-10.72 ס"מ.
ב. 0.6331

בדיקות השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

כששונוויות האוכלוסייה לא ידועות ומניחים שהן שווות – רקע

$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$	$H_0 \quad \mu_1 - \mu_2 = c$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:
$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 > c$	$H_1 \quad \mu_1 - \mu_2 < c$	1. מדגמים בלתי תלויים 2. σ_1, σ_2 לא ידועות אך שווות 3. המשתנים בכל אוכלוסייה מתפלגים נורמלית	
$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$ 	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$ 	$t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ או $t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$ 	אזור הדחיה של H_0

$$\text{סטטיסטי המבחן: } t_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - c}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}}$$

$$\text{השונות המשוקלلت: } S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

חלופה אחרת לכל הכרעה:

נדחה H_0 אם מתקיים :	
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$ או $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 < c - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$
$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 > c + t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \cdot \sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}$	

דוגמה (פתרו בהקלטה) :

חברה המייצרת מוצרי בנייה טוענת שפיתחה סגסוגת (תערובת מתכות) שטמפרטורת ההתקה שלה גבוהה משמעותית מטמפרטורת ההתקה של הסגסוגת לבנייה שימושים בה כיום לבניית בניינים. לצורך בדיקת טענתה המחקר נדגמו 10 יחידות של מתכוות מהסוג היין ו-12 יחידות של מתכוות מהסוג החדש. להלן תוצאות המדגם:

טמפרטורת ההתקה הממוצעת במתכת היינה 1170 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 200$.

טמפרטורת ההתקה הממוצעת במתכת החדשה 1317 מעלות עם אומד חסר הטיה לשונות $S^2 = 260$.
 נניח לצורך פתרון שטמפרטורת ההתקה מתפלגת נורמללית עם אותה שונות במתכוות השונות. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

שאלות

1) להלן נתונים של שטחי דירות מtower דירות שנבנו בשנת 2012 ובשנת 2013 (במ"ר) :

120	94	90	130	95	112	120	2012
69	74	105	91	82	100		2013

בדקו שבסנת 2013 הייתה ירידה משמעותית בשטחי הדירות לעומת שנת 2012
 עבור רמת מובהקות של 5%.
 הניתנו שטחי הדירות בכל שנה מתפלגים נורמלית עם אותה שוננות.

2) נדגמו 15 ישראלים ו-15 אמריקאים. כל הנדגמים נגשו ל מבחון IQ. להלן תוצאות

הדגם :	המדינה	ישראל	ארה"ב
	גודל המדגם	15	15
	סכום הציונים	1560	1470
	סכום ריבועי הציונים	165,390	147,560

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל של נקודה בין ישראלים
 לאמריקאים מבחינת ממוצע הציונים ב מבחון-h-IQ ל佗בת ישראל.
 רשמו את כל ההנחות הדרושים לצורך פתרון התרגיל.

3) להלן תוצאות מבחן אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100.

אורך החיים ממיד ב שניות.

הקבוצה	60W	100W
\bar{x}	1007	956
S	80	72
n	13	15

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקיות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושים לפתרון.
- ב. עבור איזו רמת מובהקות ניתן לקבוע שנורות מסוג W60 דולקיות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג 100?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקיות יותר מאשר נורות מסוג 1000 שניות. רשמו את כל ההנחות הדרושים.

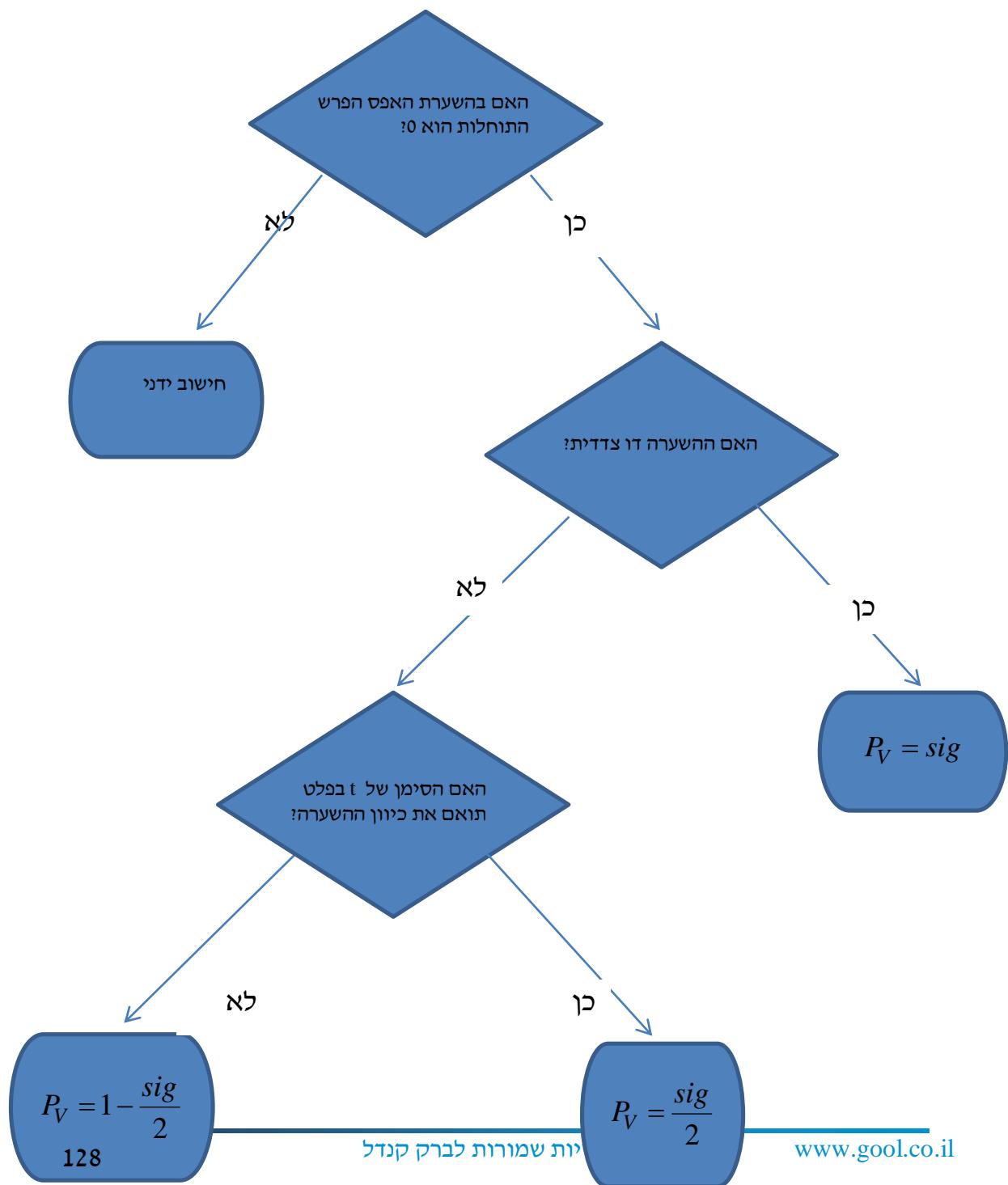
תשובות סופיות

- 1) נדחה את H_0 .
- 2) הנחות:
1. סטיות התקן שוות.
2. המשתנים מתפלגים נורמלית.
- נקבל את H_0 .
- 3) א. נדחה את H_0 .
ב. רמת מובהקות של לפחות 5%.
ג. לא נדחה את H_0 .

בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגים בלתי תלויים

ניתוח פלטיטם – רקע

MOVBE הבודקת התוצאה על סמך הפלט:



$$P_V = 1 - \frac{sig}{2}$$

128

יות שמורות לביק קנדל

$$P_V = \frac{sig}{2}$$

www.gool.co.il

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים שניים אזוריים שונים במדינה על מס' האחים והאחיות שלהם. להלן הפלט שהתקבל:

Group Statistics

	Region of the United States	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Number of Brothers and Sisters	North East	676	3.76	2.939	.113
	South East	410	4.05	2.993	.148

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower		
Number of Brothers and Sisters	Equal variances assumed Equal variances not assumed	.173	.677	-1.583 -1.576	1084 850.945	.114 .115	-.293 -.293	.185 .186	-.657 -.658	.070 .072	

- מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- בדוק ברמת מובהקות של 5% האם קיים שוויזון שוניות בין שני האזורים?
- בדוק האם קיים הבדל בין-"South East" ל-"North East" ברמת מובהקות של 5% מבחן מס' האחים והאחיות המוצע.
- מתי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שההפרש המוצע בין-"South East" לבין-"North East" חיובי??

שאלות

1) להלן פلت מתוכנת SPSS מתוך מחקר שבחן את רמת האופטימיות של גברים ונשים. רמת האופטימיות נמדזה בסולם ציונים של 1 עד 5.

Group Statistics

		GENDER	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
optimizm	MALE		633	2.6053	.49781	.01979
	FEMALE		568	2.5503	.48483	.02034

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means							
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference		
								Lower	Upper	
optimizm	Equal variances assumed	.383	.536	1.935	1199	.053	.05500	.02842	-.00076	?
	Equal variances not assumed			1.938	1190.977	.053	.05500	.02838	-.00068	.11067

- א. האם ניתן להניח ששיעור האופטימיות של נשים וגברים שווה ברמת מובהקות של 5%?
- ב. ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הנשים לגברים ברמת האופטימיות הממוצעת שלהם?
- ג. מצא את הגבול העליון של רוח הסמק המשומן בסימן שאלה בפלט. דיקק עד 5 ספרות אחרי הקודעה.
- ד. בנה רוח סמק לתוחלת רמת האופטימיות של הגברים ברמת סמק של 95%.

2) פסיכולוגים טוענים שאנשים שניגשים לבחן אינטלקגנציה יותר מפעם אחת נוטים לקבל ציונים גבוהים יותר. להלן הפלט שהתקבל:

Group Statistics

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
grade	A	9	96.8889	9.40006	3.13335
	B	11	108.4545	11.46616	3.45718

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances			t-test for Equality of Means							
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference			
								Lower	Upper		
grade	.206	.656	-2.428	18	.026	-11.56566	4.76333	-21.57304	-1.55828		
			-2.479	17.997	.023	-11.56566	4.66583	-21.36832	-1.76299		

T-Test

מקרה :

A = נגשו פעם אחת.

B = נגשו יותר מפעם אחת.

א. רשמו את השערות המחקר והסבירו מהו המבחן המתאים כאן.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם היה מדובר על אותם אנשים שציוונים נבדק פעמי אחדי המבחן הראשוני שעשו ופעמי אחריה המבחן השני?

ג. האם ניתן לומר כי מידת הפיזור של ציוני האנשים הנבחנים בפעם הראשונה שונה ממידת הפיזור של ציוני האנשים אשר נבחנים בפעם השנייה. בדוק ברמת מובהקות של $\alpha = 0.05$.

ד. האם נכונה טענת הפסיכולוגים ברמת מובהקות של $\alpha = 0.01$.

(3) חלק מחקר בנושא הנישואין בישראל, אחד החוקרים העלה השערה שיש הבדל בממוצע גיל הנישואין (הראשונים), בין נשים הגרות בערים מרכזיות לבין נשים הגרות בערים מרוחקות מהמרכז.
לשם כך נדגמו 50 כלות מכל אחת משתי ערים עיר א'-מרכזית ועיר ב'-מרוחקת ונרשם גילן. תוצאות עיבוד הנתונים מופיעות בטבלאות שללון:

T-Test**Group Statistics**

מקום המגורים	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
גיל הנישואין	עיר א	24.8072	1.38978	.19654
	עיר ב	23.0131	1.62070	.22920

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
גיל הנישואין	Equal variances assumed	.330	.567	5.942	98	.000	1.79415	.30193	1.19497 2.39332
	Equal variances not assumed			5.942	95.772	.000	1.79415	.30193	1.19480 2.39350

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- ב. מצא רוח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין עיר א לעיר ב מבחינת גיל הנשים הממוצע בנישואין הראשונים.
- ג. האם ניתן לומר ברמת מובהקות של 1% שנשים בערים מרכזיות מתחנות בגיל מאוחר יותר מאשר נשים הגרות בערים מרוחקות?

(4) להלן פלט של תוכנת SPSS :

T-Test

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
X	26	36.3077	13.23259	2.59513
Y	24	46.4583	20.96369	4.27920

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	4.446	.040	-2.164	???	.044	-10.15064	???	-20.03781	-.26347
Equal variances not assumed			-2.038	38.267	.048	???	5.00462	-20.27964	-.02164

- א. השלימו את סימני השאלה בטבלה.
 ב. מהי מובוקות התוצאה לבדיקה הטענה שקיים הבדל בין השונות של X לעומת Y ?
 ג. מהי מובוקות התוצאה לבדיקה הטענה שהתוחלת של X גדולה מהתוחלת של Y ?
 ד. מהי מובוקות התוצאה לבדיקה הטענה שהתוחלת של X קטנה מהתוחלת של Y ?

תשובות סופיות

- 1) א. קיבל את H_0 ונכarius שיש שוויון שוניות.
 ב. נקבע שלא קיים הבדל בין נשים לגברים מבחינת האופטימיות המומוצעת.
 ג. $0.11076 \leq \mu \leq 2.6441$.
 ד. $2.5665 \leq \mu \leq 2.6441$.
- 2) א. מבחן T להפרש ממוצעים במדגים בלתי תלויים.
 ב. מבחן T למדגים מזוגיים.
 ג. קיבל את H_0 , נקבע לקיום שוויון שוניות.
 ד. קיבל את H_0 , לא קיבל את טענת הפסיכולוגים.
- 3) א. מבחן T להשוואת תוחלת במדגים בלתי תלויים.
 ב. $1.19497 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2.39332$ ג. כן.
 ד. $0.022 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 0.04$.
- 4) א. $10.15, 4.69, -48$
 ב. 0.978

סטטיסטיקה

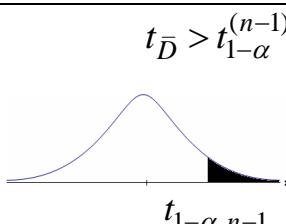
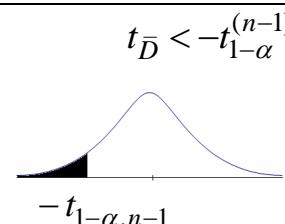
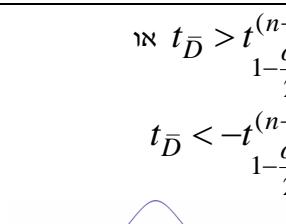
פרק 16 - בדיקת השערות לתוכלת ההפרש במדגים מזוגים

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות למדגים מזוגים	135
2. ניתוח פלטימ.....	139

בדיקות השערות על תוכלת הרפרשים במדגמים مزוגים (תלויים)

בדיקות השערות למדגמים מזוגים – רקע

$H_0: \mu_D = C$	$H_0: \mu_D = C$	$H_0: \mu_D = C$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:
$H_1: \mu_D > C$	$H_1: \mu_D < C$	$H_1: \mu_D \neq C$	תנאים:
		1. σ_D אינה ידועה 2. או מדגם מספיק גדול $D \sim N$	כלל ההכרעה: ازור הדחיה של H_0
 $t_{\bar{D}} > t_{1-\alpha, n-1}$ H_0 - דוחים את ■	 $t_{\bar{D}} < -t_{1-\alpha, n-1}$ H_0 - דוחים את ■	 $t_{\bar{D}} > t_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}$ או $t_{\bar{D}} < -t_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}$ H_0 - דוחים את ■	
$\bar{D} > C + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} < C - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	$\bar{D} > C + t_{\frac{1-\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$ ו $\bar{D} < C - t_{\frac{1-\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}$	חלופה לכלל הכרעה: נדחה H_0 אם מתתקיים:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - n\bar{D}^2}{n-1}, \quad t_{\bar{D}} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

דוגמה (פתרו בהקלטה):

חברה שיווקית מעוניינת לבדוק את טענת רשות השיווק "מגה בעיר" הטענה שמחירים נמוכים מהמחירים מרשות השיווק "שופרסל". לצורך הבדיקה נבחרו באקראי 4 מוצרים שונים. המוצרים נבדקו בשתי הרשותות. להלן המוצרים :

ה מוצר / רשות	מגה בעיר	שופרסל
18	17	שampoo
57	48	gil כביסה
35	35	עוגת גבינה
10	12	לחם
47	49	קפה נמס
142	113	בקבוק יין
26	20	גבינה בולגרית

בහנחה והמחירים מתפלגים נורמלית, בדקנו ברמת מובהקות של 5% את טענת רשות "מגה בעיר".

שאלות

- 1)** במטרה לבדוק האם קיימים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחיר לשיחות בין-יל. נדגמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דלקת שיחה. להלן התוצאות:

חברה/ מדינה	ארה"ב	קנדה	הולנד	פולין	מצרים	סין	יפן
X	1.5	2.1	2.2	3	3.5	3.2	4.2
Y	1.4	2	1.9	3.1	3.2	3.2	4.2

בנהנה והמקרים מתפלגים נורמלית בכל חברת, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיימים הבדל בין החברות מבחינת המחיר במומוץ?

- 2)** מכון המRAIN לפסיכוןטרא טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביוטר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	590	500	390	670	640	420	470	506
אחרי	580	520	510	680	610	430	540	570

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכוןטרא מתפלגים נורמלית.

- 3)** נדגמו 5 סטודנטים שישימנו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן הציונים שלהם בסמסטר א' ו- ב':

סטטיסטיקה א'	82	75	90	68	74	
סטטיסטיקה ב'	100	76	87	84	80	

פורסם שתלמידים שמשיכים את סמסטר ב' משפרים בממוצע את הציונים ב-5 נקודות לעומת סמסטר א'. הניחו שהציונים מתפלגים נורמלית.

- א. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהשיפור הוא יותר מ 5 נקודות?
 ב. על סמך הסעיף הקודם, מהי רמת המובהקות המינימלית להכרעה שהשיפור הוא יותר מ- 5 נקודות?
 ג. לאור זאת, מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%?

- 4)** לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני לא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחון באנגלית. נניח שציוני המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא:

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
 ב. מבחן T למדגם יחיד.
 ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
 ד. מבחן T למדגמים מזוגיים.

5) בتحقנת טיפת חלב מסויימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגמו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים.

להלן תוצאות השקליה (בק"ג) :

	4.5	9.6	0.7	2.5	משקל במכשיר 1
	3.5	6.9	1.7	0.5	משקל במכשיר 2

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית, המבחן שיש לבצע כאן הוא :

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגים מזוגים.

6) כדי להשוות בין שני אצנים נדגמו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.

המבחן שיש לבצע כאן הוא :

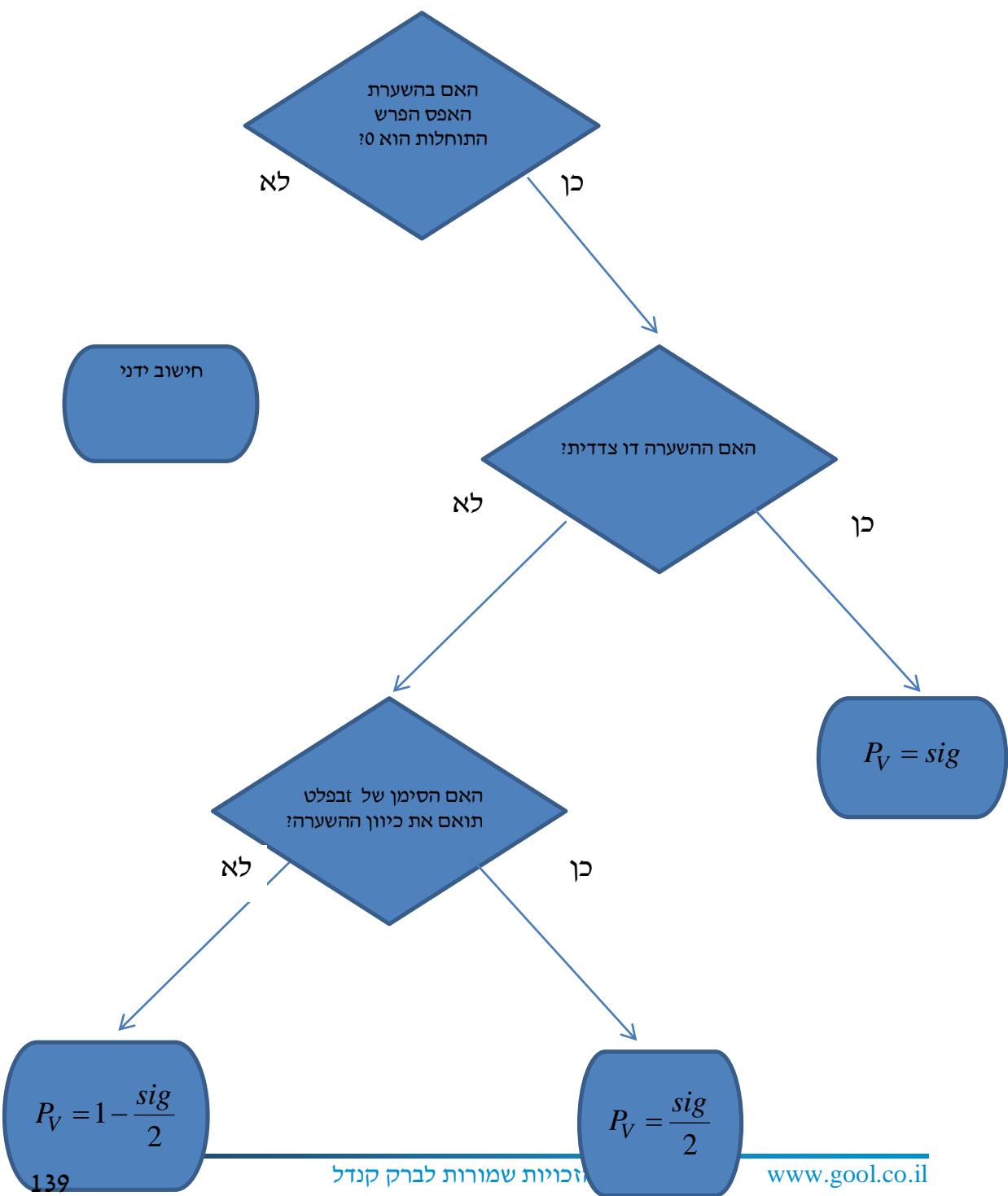
- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגים מזוגים.

תשובות סופיות

- 1) לא נדחה H_0 .
- 2) לא נדחה H_0 .
- 3) א. לא נדחה H_0 . ב. $0.5 \leq p \leq 0.5$ ג. לא נדחה H_0 .
- 4) ד'.
- 5) ד'.
- 6) ג'.

בדיקות השערות על תוחלת הרפישים במדגמים مزוגים (תלוים)

מדגמים מזוגים – ניתוח פלטיט – רקע



דוגמה (פתרון בהקלטה) :

כדי לבדוק את ההשפעה של קורס לגמילה מעישון נלקח מדגם מקרי של 5 נבדקים. עבור כל אחד מהם נמדדה צריכת הסיגריות היומיית לפני הקורס וחודשיים אחריו. הניבו שצריכת הסיגריות מתפלגת נורמלית. להלן התוצאות:

5	4	3	2	1	נבדק
30	28	25	22	40	לפני
12	10	13	24	30	אחרי

Paired Samples Statistics

	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1 BEFORE	29.0000	5	6.85565	3.06594
AFTER	17.8000	5	8.72926	3.90384

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)			
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	90% Confidence Interval of the Difference							
				Lower	Upper						
Pair 1 BEFORE - AFTER	11.20000	8.19756	3.66606	3.38452	19.01548	3.055	4	.038			

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הקורס יעיל.

שאלות

1) בסקר שנערך באראה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים על השכלה הוריהם, להלן הפלט שהתקבל:

Paired Samples Test											
	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)			
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference							
				Lower	Upper						
Pair 1	Highest Year School Completed, Father - Highest Year School Completed, Mother	-.007	3.115	.100	-.203	.189	-.072	.973	.943		

- א. תננו אומדן להפרש הממוצעים.
- ב. תננו אומדן לטיעות התקן של הפרש הממוצעים.
- ג. האם קיים הבדל מובהק בין השכלה האבות להשכלה האימהות ברמת מובהקות של 5%?

2) בתחרות קפיצה למים שופטים באופן קבוע שופט איטלקי ושופט דרום קורייני. להלן פלט המנתה את הציונים לשופטים אלה נתנו בתחרויות השונות:

Paired Samples Statistics					
		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Italy South Korea	???	300	.86742	.05008
		8.9183	???	.81992	.04734

Paired Samples Test											
	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)			
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference							
				Lower	Upper						
Pair 1	Italy - South Korea	-.42233	.36153	.02087	-.46341	-.38126	-20.234	???	???		

- א. השלימו את החלקים החסרים בפלט (מסומנים בסימני שאלה).
- ב. בדקו את הטענה שהשופט הדרום קורייני נותן בממוצע 0.2 נקודות יותר מאשר השופט האיטלקי ברמת מובהקות של 5%.
- ג. מהו רוחח הסמך ברמת סמך של 95% ל佗חת פער הציונים בין השופטים?
- ד. בנו את הרוחח כת ערך ברמת סמך של 98% ל佗חת פער הציונים בין השופטים.

3) בדקו את ציוניהם של 44 נבדקים אקראים ב מבחן הפסיכומטרי. פעם אחת לפני הכנה (Before) ופעם אחת אחרי הכנה (After).

Paired Samples Test											
	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)			
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference							
				Lower	Upper						
Pair 1 Before - After	-7.45455	19.28303	2.90703	-13.31712	-1.59197	-2.564	43	.014			

- א. רשמו מהו המבחן הסטטיסטי ונשח את ההשערות אליהם מתייחס הפלט.
- ב. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ברמת מובהקות של .5%.
- ג. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ביותר מ-5% נקודות ברמת מובהקות של .5%.
- ד. מצאו רוח סמך ל佗ולת שיפור ממוצע הציונים לאחר ההכנה ברמת ביטחון של .95%.

(4) להלן פלט של תכנת SPSS :

T-Test**Paired Samples Statistics**

	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	x	54.0000	6	5.86515
	y	46.5000	6	10.72847
				4.37988

Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)			
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference							
				Lower	Upper						
Pair 1	x - y	7.50000	??	4.72405	-4.64356	19.64356	??	5	.173		

- א. מלא את החלקים החסרים בטבלה.
- ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שיש הבדל בין X ל- Y בממוצע?
- ג. האם התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה, ואם כן גדלתה או קטנה, אם היינו מושיעים עוד תצפית שההפרש בין X ל- Y הוא 0.
- ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש X גדול מ- Y בממוצע?
- ה. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש X קטן מ- Y בממוצע?
- ו. בנו רוח סמן ל佗ולת של X ברמת סמן של 90%.

תשובות סופיות

- (1) א. -0.007
 ב. 0.1
 ג. אין הבדל מובהק.
- (2) א. $d.f = 299$
 ב. $n = 300$
 ג. $\bar{X} = 8.496$. Sig = 0
- (3) א. ראה וידאו.
 ב. נדחה את H_0 .
 ג. לא נדחה את H_0 .
- (4) א. 11.5715 ,1.5876
 ב. 0.173
 ג. יגדל.
 ד. $0.0865 < \mu < 49.18$

סטטיסטיקה

פרק 17 - הקשר בין רוח סמרק לבדיקה השערות להפרש תוחלות

תוכן העניינים

1. הקשר בין רוח סמרק לבדיקה השערות להפרש תוחלות.....
145

הקשר בין רוח סמך לבדיקה השعروות על הפרש תוחלות

רקע

ניתן לבצע בדיקת השعروות דו צדדיות ברמת מובהקות α על $\mu_1 - \mu_2$:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = C, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq C$$

על ידי בניית רוח סמך ברמת סמך של $\alpha - 1$ על $\mu_1 - \mu_2$:

אם C נופל ברווח \leftarrow קיבל את H_0 .

אם C לא נופל ברווח \leftarrow נדחה את H_0 .

דוגמה (פתרו בהקלטה):

חוקר ביצע בדיקת השعروות לתוחלת ההפרש במדגים מזוווג.

להלן השعروתיו: $H_0: \mu_D = 80, \quad H_1: \mu_D \neq 80, \quad \alpha = 5\%$.

החוקר בנה רוח סמך ברמה של $90\% < \mu_D < 78$.

האם אפשר לדעת מה מסקנתו, ואם כן מהי?

שאלות

1) נדגמו 5 סטודנטים שסיימו את הקורס סטטיסטיקה ב'. להלן ציוניהם בסMASTER א' ו- ב':

סMASTER A	סMASTER B
80	74
84	68
87	90
76	75
100	82

א. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין סMASTER A' לבין סMASTER B'.

ב. פורסם שתלמידים ממשיכים את סMASTER B' משבטים בממוצע את הציונים ב-5 נק' לעומת סMASTER A'. האם יש אמת בפרסום?

2) הוחלט להשוות הציונים אצל מרצה X ואצל מרצה Y. נבחרו באקראי 6 סטודנטים, 3 סטודנטים של מרצה X ו-3 סטודנטים של מרצה Y, עבורם התקבלו הציונים הבאים:

מרצה X	90	82	68
מרצה Y	81	68	64

א. חשבו רוח סמך ברמת סמך 90% להפרש בין התוחלות של הציונים אצל שני המרצים.

ב. האם ברמת מובהקות של 10% נכיר שיש הבדל בין תוחלות הציונים אצל שני המרצים?

שאלות רב-ברירה:

3) סטטיסטיאי נתקש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מוגדים מקרים בלתי תלויים.

הוא חישב רוח סמך להפרש ברמת סמך 0.98, וקיים את הרווח $\mu_2 - \mu_1 < 2$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותן נתוניות את השערות:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$, מסקנתו תהיה:

א. לדחות את השערת האפס.

ב. לא לדחות את השערת האפס.

ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.

ד. שלא נתנות בשאלת סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

- (4) במטרה לבדוק האם קיימים הבדל בין קווי זהב לבזק מבחינות ממוצע המחרירים לשיחות ביןיל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקט שיחה. בהנחה והמחקרים מתפלים נורמלית בנו רוח סמך ממוצע ההפרשנים וקיים : $\mu_D < 0.0293 - 0.2145$, רוח הסמך הוא ברמת סמך של 95% .
לכן מסקנת המחקר היא :
- א. ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיימים הבדל בין החברות.
 - ב. ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיימים הבדל מובהק בין החברות.
 - ג. לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

תשובות סופיות

(1) א. $-3.8 \leq \mu_D \leq 19$
ב. נכרייע שיש אמת בפרסום.

(2) א. $-8.5 \leq \mu_X - \mu_Y \leq 26.5$
ב. נכרייע שאין הבדל.

(3) ג'.
א. (4)

סטטיסטיקה

פרק 18 - בדיקת השערות על שוניות

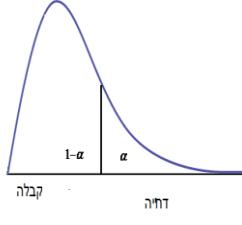
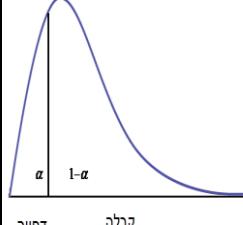
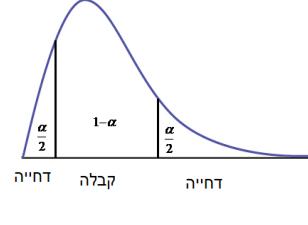
תוכן העניינים

148	1. בדיקת השערות על שוניות וסטיטית תקן
153	2. בדיקת השערות על שתי שוניות

בדיקות השערות על שונות וסטיית תקן:

רקע:

בדיקות השערות על שונות האוכלוסייה כאשר התוחלת לא ידועה:

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	תנאים:
$X \sim N$			
 $\chi^2 > \chi_{1-\alpha}^{2(n-1)}$	 $\chi^2 < \chi_{\alpha}^{2(n-1)}$	 $\chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$ או $\chi^2 > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^{2(n-1)}$	נדחה את השערת האפס אם:

$$\text{סטטיסטי המבחן: } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

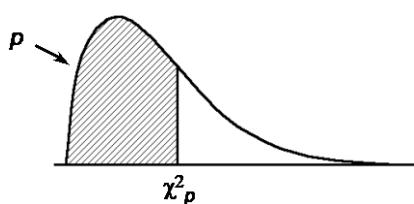
התפלגות χ² בריבוע:

$$\text{אם } (\mu, \sigma^2, \text{ והפרמטר } \mu \text{ אינו ידוע, מתקיים ש: } \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^{2(n-1)}$$

התפלגות זו היא התפלגות אסימטרית חיובית המתחילה מהערך אפס וערכיה שואפים לאינסוף.

התפלגות זו תלולה בדרגות החופש.

אם μ אינו ידוע, אז: $d.f = n - 1$.



דוגמה:

ציוני IQ לפי סטנדרטים אמריקאים מתפלגים נורמלית עם $\sigma = 15$.
מעוניינים לבדוק האם שונות הציונים של נבחנים ישראלים שונה מאשר בארהיקה.

$$\text{במבחן של 20 ישראלים התקבל: } \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 3420$$

מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

פתרון:

האוכלוסייה: נבחנים ישראלים במבחן IQ.

המשתנה: $X = \text{ציון IQ}$

פרמטר: σ^2

$$\begin{aligned} H_0: \sigma^2 &= 15^2 = 225 \\ H_1: \sigma^2 &\neq 225 \end{aligned}$$

השערות:

הנחה: $X \sim N$

כלל הכרעה: $d.f = n - 1 = 20 - 1 = 19$

נדחה את H_0 אם $X^2 < 8.91$ או $X^2 > 32.9$

תוצאות המבחן: $n = 20$

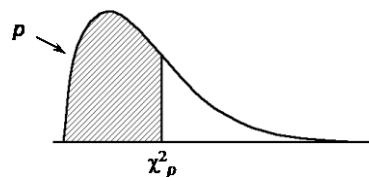
$$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 3420$$

$$S^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{3420}{20-1} = 180$$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{19 \cdot 180}{225} = 15.2$$

מסקנה: לא נדחה את H_0 , לא נסיק שונות הציונים של נבחנים ישראלים במבחן IQ.

שונה מזו של אמריקאים. ($\alpha = 5\%$)

טבלת התפלגות χ² – ערכי החלוקה χ²_p


df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0 ⁴ 393	0.0 ³ 157	0.0 ³ 982	0.0 ² 393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות:

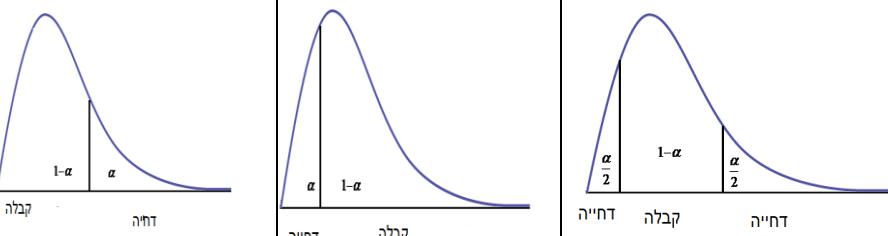
- 1)** חברת אורות סוכר במשקל עם סטיית תקן 20 גרם. משקל הסוכר באירועה מתפלג נורמלי. החברה החליפה את מכונות האירועה במטרה לדיקק יותר במשקל הנארז.
רוצחים שטיתת התקן תהיה קטנה יותר.
לצורך בדיקה דגמו 5 אריות סוכר ולהלן משקלן (בגרם) :
 1008, 996, 1005, 997
מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?
- 2)** זמן החילמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוימים מתפלג נורמלי¹ עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 החולים. זמן החילמה שליהם בשעות היו : 38, 50, 72, 90, 110.
 א. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החילמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורי?
 ב. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א', אם נגדיל את רמת המובהקות?
 ג. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א' אם נקטין את רמת המובהקות?
 ד. האם ניתן לדעת מה תהיה התשובה לסעיף א' אם נוסיף תצפית שערכה 70?
- 3)** הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלי עם ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.
 א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 5%, האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה, בבחירה המבחן המתאים הסתמן על המסקנה מסעיף א'.
- 4)** השערות המחקר הן : $H_1: \sigma^2 > 100$ $H_0: \sigma^2 = 100$
 מתכוונים לבצע מדגם בגודל 10 תצפיות. רמת המובהקות היא 5%.
 א. מה תהיה עוצמת המבחן אם $\sigma^2 = 150$?
 ב. איזו השערה אלטרנטיבית ניתן עוצמה של 90%?
- 5)** השערות המחקר הן : $H_1: \sigma < 2$, $H_0: \sigma = 2$.
 במדגם של 21 תצפיות התקבל סטיית תקן 1.143
 תננו הערכה למובהקות התוצאה.

תשובות סופיות:

- (1) לא נדחה H_o .
- (2) א. נדחה את H_o .
ב. לא תשתנה.
ג. לא ניתן לדעת.
- (3) א. נדחה את H_o .
ב. לא נדחה את H_o .
- (4) א. בין 25% ל-50%.
ב. $405.3 < P_v < 0.005$
- (5)

בדיקות השערות על שתי שונותיות:

רקע:

$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$	השערת האפס: השערת אלטרנטיבית:
$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$	$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$	$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$	
1. מדגמים בلتוי תלויים $X_1, X_2 \sim N .2$			תנאים:
 $F \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}$ $F \leq \frac{1}{f_{1-\alpha}^{(n_2-1, n_1-1)}}$			נדחה את השערת האפס אם:

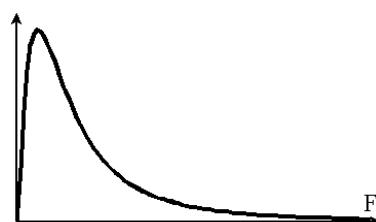
$$\text{סטטיסטי המבחן: } F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

התפלגות F:

$$\text{אם } (\mu_1, \sigma^2) \text{ ו- } (\mu_2, \sigma^2) \text{ אזי: } X_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2) \text{ ו- } X_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$$

התפלגות F הינה התפלגות אסימטרית חיובית התלויה בדרגות חופש של המונה ושל המכנה.

$$\text{כמו כן בתפלגות F מתקיים התכונה הבאה: } F_\alpha(n_1-1, n_2-1) = \frac{1}{F_{1-\alpha}^{(n_2-1, n_1-1)}}$$



$$df_1 = n_1 - 1$$

$$df_2 = n_2 - 1$$

דוגמה:

מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמןם שליהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמן

$$\text{ביצוע המשימה: } \sum (y_i - \bar{y})^2 = 204.$$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות: $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$.
בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונות? מה יש להניח?

פתרון:

האוכלוסיות: נשים מול גברים.

משתנה: y = זמן ביצוע משימה של גבר, x = זמן ביצוע משימה של אישה

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \quad \text{פרמטר:}$$

$$H_0: \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} = 1 \quad \text{השערות:}$$

$$H_1: \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \neq 1$$

הנחות: 1. מדגימים ב"ית $x, y \sim N$. 2.

כל הכלעה:

$$\alpha = 2\%$$

$$n_1 = 13, d.f_1 = n_1 - 1 = 12$$

$$n_2 = 10, d.f_2 = n_2 - 1 = 9$$

נדחה את H_0 אם $F > 5.11$ או $F < 0.23$

$$S_y^2 = \frac{204}{10-1} = 22 \frac{2}{3} \quad \text{תוצאות המדגם:}$$

$$S_x^2 = \frac{200}{13-1} = 16 \frac{2}{3}$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{16 \frac{2}{3}}{22 \frac{2}{3}} \quad \text{סטטיטיסטי המבחן:}$$

מסקנה: ברמת מובהקות של 2% קיבל את H_0 .

לא קיים הבדל מובהק בין גברים לנשים מבחינת השונות שלהם.

ר"ג ר' מנול"ח חטבגה	טבלת ערכם קרטיסים לפי התפלגות F $\alpha = 0.05$																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	60	120	∞
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	246.46	248.01	249.05	252.20	253.25	254.31
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.69	8.66	8.64	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.84	5.80	5.77	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.60	4.56	4.53	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.92	3.87	3.84	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.49	3.44	3.41	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.20	3.15	3.12	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	2.99	2.94	2.90	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.83	2.77	2.74	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.70	2.65	2.61	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.60	2.54	2.51	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.51	2.46	2.42	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.44	2.39	2.35	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.38	2.33	2.29	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.33	2.28	2.24	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.29	2.23	2.19	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.25	2.19	2.15	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.21	2.16	2.11	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.18	2.12	2.08	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.16	2.10	2.05	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.13	2.07	2.03	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.11	2.05	2.01	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.09	2.03	1.98	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.07	2.01	1.96	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.05	1.99	1.95	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.04	1.97	1.93	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.02	1.96	1.91	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.01	1.94	1.90	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	1.99	1.93	1.89	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.90	1.84	1.79	1.64	1.58	1.51
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.95	1.85	1.78	1.74	1.58	1.51	1.44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.82	1.75	1.70	1.53	1.47	1.39
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.86	1.76	1.69	1.64	1.46	1.39	1.30
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.73	1.66	1.61	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.64	1.57	1.52	1.32	1.22	1.00

n ^{ל'} ח' מונה/ר' ח' מכנה	טבלת ערכים קרטיסים לפי התפלגות F															∞	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	60	120	
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6170.10	6208.73	6234.63	6313.03	6339.39	6365.86
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.45	99.46	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.83	26.69	26.60	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.15	14.02	13.93	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.68	9.55	9.47	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.52	7.40	7.31	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.28	6.16	6.07	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.48	5.36	5.28	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.92	4.81	4.73	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.52	4.41	4.33	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.21	4.10	4.02	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	3.97	3.86	3.78	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.78	3.66	3.59	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.62	3.51	3.43	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.49	3.37	3.29	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.37	3.26	3.18	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.27	3.16	3.08	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.19	3.08	3.00	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.12	3.00	2.92	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.05	2.94	2.86	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	2.99	2.88	2.80	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.94	2.83	2.75	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.89	2.78	2.70	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.85	2.74	2.66	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.81	2.70	2.62	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.78	2.66	2.58	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.75	2.63	2.55	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.72	2.60	2.52	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.69	2.57	2.49	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.66	2.55	2.47	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.48	2.37	2.29	2.02	1.92	1.80
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.56	2.38	2.27	2.18	1.91	1.80	1.68
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.31	2.20	2.12	1.84	1.73	1.60
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.39	2.21	2.09	2.00	1.72	1.60	1.46
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.15	2.03	1.95	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.00	1.88	1.79	1.47	1.32	1.00

שאלות:

1) להלן נתונים על שטחי דירות במ"ר עברו דירות חדשות שנבנו בשנת 2012 ובסנת 2013:

120	94	90	130	95	112	120	2012
	69	74	105	91	82	100	2013

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% את ההשערה ששוניות שטחי הדירות החדשות בשנת 2012 ובשנת 2013 שוות. מה הן ההנחות הדרושים לביצוע הבדיקה?

ב. האם וכייד היהתה משתנה המסקנה מהסעיף הקודם אם מסתבר שהלה טעות ברישום ויש להפחית 10 מ"ר מכל הדירות שמופייעות במדגם?

2) בתחום הבניין משתמשים בשני סוגי מתכוות: מתכת A ומתקת B. מחקר מעוניין לבדוק האם קיים הבדל בין שני סוגי המתכוות מבחינת החזק שלן. דגמו מס' 1000 מוגדים מתכת A ו-2000 מוגדים מתכת B.

B	A	סוג המתכת
10	8	n
30	16	$\sum X_i$
198	60	$\sum X_i^2$

יש להניח שרמת החזק של המתכוות מתפלגת נורמללית.

א. האם קיים הבדל בין שוניות החזק של מתכוות?

ב. האם קיים הבדל בין תוחלות החזק של מתכוות? בכל סעיף רמת מובהקות של 10%.

3) מחקר סוציולוגי מעוניין לחקור את הרגלי הבילויים בקבוצות גיל שונות. ידוע כי בקרב האוכלוסייה הבוגרת (מעל 18) ההוצאה החודשית על בילויים מתפלגת נורמללית עם תוחלת של 500₪ וסטיית תקן של 300₪.

במדגם שנעשה על סטודנטים בגילאי 21-26 התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 10,000₪. כמות הסטודנטים שנדגמה 16. בדוגמה שנעשה על 11 מבוגרים בשנות הלושים התקבל אומד חסר הטיה לשונות ההוצאה החודשית על בילויים 490,000₪.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ההוצאה על בילויים בקרב סטודנטים בקבוצת גילאי 21-26 נמוכה מהשונות אצל כל המבוגרים.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 1% האם הפיזור של ההוצאה החודשית לבילויים גדול יותר בקבוצת גיל ה-30 מאשר בקבוצת גיל 21-26.

4) נתון (μ_x, σ_x^2) , וכמו כן (μ_y, σ_y^2) .
מאוכלוסייה X נדגו 7 תכיפות ומאוכלוסייה Y נדגו 13 תכיפות.

א. כיצד $\frac{S_x^2}{S_Y^2}$ מתפלג?

ב. מה ההסתברות ש- S_x^2 גדול ביותר מפי 3 מאשר S_Y^2 ?

תשובות סופיות:

- ב. מסקנה לא תשתנה. **(1)**
ב. לא נדחה את H_0 . **(2)**
ב. נדחה את H_0 . **(3)**
ב. 5% $F(6,12)$. **(4)**

סטטיסטיקה

פרק 19 - שאלות מסכמת בבדיקה השערות

תוכן העניינים

159	1. שאלות פתוחות מסכמות
163	2. שאלות רב ברירה (אמריקאיות)

שאלות מסכימות בבדיקה השערות על פרמטרים

שאלות

- 1) שני חוקרים נתקשו לבדוק את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 520$, $H_1: \mu > 520$. כל חוקר בדק מדגם של 225 נחקרים. ידוע ש- $\sigma = 20$. חוקר א' קבע את כל הכרעה לפי $\alpha = 0.05$. חוקר ב' מחליט לדחות H_0 אם $\bar{X} > 522$.
- למי מהחוקרים הסתברות לטעות מסוג ראשוני יותר?
 - מהי ההסתברות לטעות מסוג שני של חוקר ב' עבור $\mu = 525$?
 - הסביר ללא חישוב נוספת, האם ההסתברות לטעות מסוג שני עבור $\mu = 525$, של חוקר א' שווה/קטנה/גדולה לו של חוקר ב'.
 - חוקר א' קיבל במדגם שלו $\bar{X} = 523$. מהי מסקנותו?
- 2) ידוע כי תוחלת מספר הליקים היומי של דנה היא 12 עם סטיית התקן 5. דני טוען שהוא יותר פופולארי ממנה בכך שהוא מקבל יותר ליקים ממנה ביום. על-מנת לבדוק זאת ספר דני כמה ליקים הוא קיבל בכל יום במשך 7 שבועות (כלומר, ב- 49 ימים) וקיבל סך-הcole 637 ליקים. נניח כי סטיית התקן של מספר הליקים שدني מקבל ביום זהה לסטיית התקן של דנה.
- מהי רמת המובהקות שכך לדני לדרוש, כדי שדנה תשתכנע בזכות טענתו (shedni פופולרי יותר בכך שהוא מקבל יותר ליקים ממנה ביום).
 - אם דני משער שתוחלת מספר הליקים שהוא מקבל ביום היא 14 וקובע רמת מובהקות 2.5%, מהי עוצמת המבחן של דני?
- | B | A | רשות | מוצר / רשות |
|---|---|------|-------------|
| 5 | 5 | | 1 |
| 5 | 4 | | 2 |
| 3 | 5 | | 3 |
| 4 | 7 | | 4 |
- 3) ברצוננו להשוות בין רשותות אלBIN B. לשם כך בחרנו 4 מוצרים, ובדקנו את מחיריהם בשתי הרשותות. להלן התוצאות: הניחו כי המחיר מתפלגים נורמלית.
- אם יש הנחות נוספות כדי לבצע את המבחן הפרטורי רשמו אותן.
- בדקו האם קיים הבדל בין הרשותות מבחינה תוחלת המחיר. רמת מובהקות של 5%.
 - חזרו על הסעיף הקודם בהנחה ונבחרו בכל רשות מוצרים באקראי ולא בהכרח אותם מוצרים.

4) במדגם של 10 ישראלים שנבחנו ב מבחן ה-QI נתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum X_i = 1020, \quad \sum X_i^2 = 105120$$

במדגם של 14 אמריקאים שנבחנו ב מבחן ה-QI נתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum X_i = 1386, \quad \sum X_i^2 = 138644$$

נתון שצינוי הבחינה מתפלגים נורמלית בכל מדינה.

א. בדקו ברמת מובהקות של 10% האם קיים שונות שוניות בין אוכלוסיות אמריקה לאוכלוסיות ישראל?

ב. בדקו האם קיים הבדל בממוצע הציונים בבחינת ה-QI בין ישראל לארה"ב. ברמת מובהקות של 5%?

5) במטרה לבדוק האם סטודנטים הלומדים במכילות משקיעים יותר זמן ללימודים מאשר סטודנטים באוניברסיטאות נדגו 12 סטודנטים ובדקו לכל סטודנט את הזמן שהוא משקיע ביום ללימודים. הזמן נמדד בזווית:

סטודנטים באוניברסיטאות	סטודנטים במכילות
180	140
150	204

סטודנטים במכילות	סטודנטים באוניברסיטאות
171	189
186	191
156	190
176	180

א. נסחו את ההשערות ובודק אותן ברמת מובהקות של 5%. רשום את כל ההכרעה ואת ההנחות הדרושים לביצוע המבחן הפרטורי.

ב. חשבו את p-value.

ג. ישנה טענה שממוצע זמן ההשקה בלימודים במכילות הוא 3.5 שעות ביום. בדוק את הטענה כאשר רמת המובהקות הינה 5%.

6) במדינת טרפסו המשכורות במשק מתפלגות נורמלית עם ממוצע של 1 אלף דולר וסטיית תקן של 0.2 אלף דולר. בוצע מדגם מקרי בו השתתפו 5 נשים ו 5 גברים במדינת שומקום שבה המשכורות מתפלגות נורמלית גם כן.

גברים	נשים	להלן משכורותיהם באלפי דולר :
1.1	1.2	0.7
1.2	1.8	1.9
2	1.1	0.9
1.4		

א. בדקו את הטענה שממוצע משכורותיהם של אזרחי שומקום גבוה מאשר ממוצע משכורותיהם של אזרחי טרפסו ברמת מובהקות של 5%. בהנחה שסטיית התקן זהה בשתי המדינות.

ב. חזו על הסעיף הקודם ללא ההנחה הניל.

ג. ישנה טענה שסטיית התקן במדינת שומקום גבוהה מזו של טרפסו. בדקו ברמת מובהקות של 5%.

7) במטרה להשוות בין אחוזי הצפיפות של גברים ונשים בתוכנית טלוויזיה מסוימת בוצע סקר ובו התקבלו תוצאות הבאות:

	צופים	לא צופים
גברים	72	120
נשים	320	42

א. האם יש הבדל בין אחוזי הצפיפות של גברים ונשים ברמת מובהקות של 1%?

ב. עבור רמת מובהקות של 5% בדוק טענה שambilן הצופים בתוכנית הטלוויזיה אחוז הנשים גדול פי 2 מאשר הגברים.

8) בשנת 2000 היה מדich כלים בבית. מחקר רוצה לבדוק האם חיים פרופורציית המשפחות עם מדich כלים עליה. הוחלט לבצע מוגם אקראי של 150 משפחות.

א. רשמו את השערות המחקר.

ב. מה היא מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5% אם מוגם ל-102 משפחות היה מדich כלים.

ג. מהי הטעות האפשרית במסקנה מהסעיף הקודם.
האם ניתן לדעת את הסתברותה?

9) נערך מחקר על הקשר בין עישון ויתר לחץ דם. נבדק מוגם מקרי של 200 מעשנים ונמצא כי 30 סבלו מיתר לחץ דם.
ידוע שבאוכלוסייה 18% סובלים מיתר לחץ דם.

א. בדקו ברמת מובהקות 0.1 את ההשערה כי אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרוב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ב. מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שאחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרוב המעשנים גדול מאשר כלל האוכלוסייה.

ג. מהי עצמת המבחן, אם אחוז הסובלים מיתר לחץ דם בקרוב אוכלוסיית המעשנים היא בפועל 25%.

10) להלן התפלגות מספר הנסיעות לחופשה השנתית במוגם של משפחות ישראליות. בדקו ברמת מובהקות של 5%:

מספר המשפחות	מספר הנסיעות
12	4
20	3
26	2
102	1
84	0

א. באיטליה משפחות נסעות בקצב ממוצע פעמיים בשנה לחופשה. האם בישראל משפחות נסעות פחות מאשר באיטליה?

ב. בהולנד 80% מהמשפחות נסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה, האם בישראל אחוז המשפחות שנסעות לפחות פעם אחת בשנה לחופשה נמוך מאשר בהולנד?

- 11) נתון כי: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$.
 $H_0: \mu = 40$, $H_1: \mu > 40$.
 מעוניינים לבדוק את ההשערה: $\bar{X} = 45$.
 דגמו 25 תצפיות מהאוכלוסייה והתקבל.
 א. חשבו את p-value (МОובחחות התוצאה).
 ב. חזו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $\mu < 40$.
 ג. חזו על סעיף א אם ההשערה האלטרנטיבית הייתה: $\mu \neq 40$.
- 12) ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של 16 נבחנים מטל אביב התקבלה שונות מדגמית-190. במדגם של 25 ירושלמים התקבלה שונות מדגמית-118.
 א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרבת נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.
 ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרבת תלמידי תל אביב גבוהה מאשר תלמידי ירושלים.

תשובות סופיות

- | | | | | |
|----------------------|---------|----------|----------|------------------------------------|
| 1) א. חוקרי Ai | . H_0 | ד. נדחה. | ג. גדלה. | ב. 0.0122 |
| 2) א. לפחות 0.0808 | | | | ב. 0.7995 |
| 3) א. לא נדחה. | | | | ב. לא נדחה. |
| 4) א. לא נדחה. | | | | ב. לא נדחה. |
| 5) א. לא נדחה. | | | | ב. בין 5% ל-10% |
| 6) א. נדחה. | | | | ב. נדחה. |
| 7) א. נדחה. | | | | ב. נדחה. |
| 8) א. $H_1: p > 0.6$ | | | | ג. טעות מסוג ראשון בסיכון של 0.05. |
| 9) א. לא נדחה. | | | | ג. 0.8749. |
| 10) א. נדחה. | | | | ב. 0.8643 |
| 11) א. 0.0062 | | | | ב. 0.9938 |
| 12) א. לא נדחה. | | | | ב. לא נדחה. |

שאלות סיוכם – שאלות רב ברירה על בדיקת השערות

(1) בבדיקה השערה חד-צדדית ימנית ברמת מובהקות $\alpha = 0.01$, נדחתה השערת האפס. מה הייתה המסקנה לו נבדקה אותה ההשערה באמצעות נתונים ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$?

- א. השערת האפס הייתה נדחתה.
- ב. השערת האפס לא הייתה נדחתה.
- ג. ההשערה המחקנית הייתה נדחתה.
- ד. בהעדר נתונים נוספים, לא ניתן לדעת.

(2) על מנת לבדוק האם ההסתברות לילדת בן הינה חצי, נבחר מוגם מקרי של 200 ילדים, ונמצא שישנם 120 בניים. מהו ההשערה האלטרנטיבית להשערת האפס?

- א. $H_1: p = 0.5$
- ב. $H_1: p = 0.6$
- ג. $H_1: p > 0.5$
- ד. $H_1: p \neq 0.5$

(3) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זחים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני לא היפנוזה. לאחר מכן נערך לשניהם מבחן באנגלית. נניח שצינוי המבחן מתפלגים נורמלית ללא ידיעת השונות האמיתית. המבחן שיש לבצע כאן הוא :

- א. מבחן Z למוגם יחיד.
- ב. מבחן Z למדוגמים יחיד.
- ג. מבחן T למוגדים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למוגדים מזוגניים.

(4) כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים ללח חוקר מוגם מקרי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות :

מהו ההשערות הנבדקות? (ההפרש חושב $Y - X$)

68	82	93	69	X לפני הנישואין -
71	84	88	80	Y לאחר הנישואין -

- א. $H_1: \mu_d < 0, H_0: \mu_d = 0$
- ב. $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$
- ג. $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0, H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$
- ד. $H_1: \mu_d > 0, H_0: \mu_d = 0$

5) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסווג שני לכך :

- השערת האפס נcona.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתובשות לא נcona בהכרח.

6) ידוע כי ילד בגיל שנתיים ישן בממוצע 9 שעות בלילה. במדגם של 20 תינוקות

בני שנתיים המתגוררים בצפון נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 10 עם סטיית תקן של 1.1. במדגם של 10 תינוקות בדרום נמצא, כי ממוצע שעות השינה בלילה הינו 7.9 עם סטיית תקן של 1.1. על מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים אלה לבין ממוצע המתגוררים בצפון יש לערוך _____, ועל מנת להשוות בין ממוצע שעות השינה של ילדים מהדרום לזו של ילדים יש להניח שההנחה הדרושים מתקיימות.

- מבחן Z למדגם יחיד ; מבחן T למדגם יחיד.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים תלויים.
- מבחן T למדגם יחיד ; מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T למדגמים תלויים ; מבחן T ממוצע יחיד.

7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם :

- רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
- רמת המובהקות המקסימאלית לדוחית השערת האפס.
- רמת המובהקות שנקבעה מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- רמת המובהקות המינימאלית לאי דוחית השערת האפס.

כדי לבדוק את הטענה שגברים רווקים שוקלים פחות מגברים נשואים לעומת חוקר מדגם מקורי של 4 גברים ומדד את משקלם לפני נישואיהם ולאחר נישואיהם. הנה התוצאות:

	לפני הנישואין					
	68	82	93	69	71	לאחר הנישואין
	84	88	80			

בדיקות

באיזה התפלגות משתמשים

ההשערות, ובכמה דרגות חופש :

- התפלגות Z ללא דרגות חופש.
- התפלגות T ו-3 דרגות חופש.
- התפלגות T ו-6 דרגות חופש.
- התפלגות χ^2 ו-3 דרגות חופש.

- 9) שני סטטיסטיקים בודקים השערות ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$ על סמך אותו מבחן. סטטיסטיקי א' בודק את ההשערה: $H_0: \mu = 20$ נגד האלטרנטיבית $H_1: \mu \neq 20$ ומחליט לא לדוח את השערת האפס. סטטיסטיקי ב' בודק את ההשערה $H_0: \mu \leq 20$ נגד האלטרנטיבית $H_1: \mu > 20$. מה יחליט סטטיסטיקי ב'?
- לדוח את השערת האפס.
 - לא לדוח את השערת האפס.
 - לא נתוניים נוספים אי אפשר לדעת מה יחליט.
- 10) חוקר בדק השערה מסוימת והחליט לדוח את השערת האפס ברמת מובהקות 5%. מה נכון לוומר?
- הוא בודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
 - הוא בודאות ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% וברמת מובהקות 2%.
 - הוא בודאות לא ידחה את השערת האפס ברמת מובהקות 9% ואילו ברמת מובהקות 2% יש לבדוק מחדש.
- 11) רמת הcolesterol בדם של אנשים מתפלג נורמלית עם תוחלת של 180 מ"ג (ל 100 סמ"ק דם). וטיפות התקן של 10 מ"ג. מעוניינים לבדוק את הטענה שצמחיים הם בעלי רמתコレsterol נמוכה יותר. נניח שטיפות התקן אצל צמחוניים זהה לטרופית התקן של כלל האנשים. במקרה של 20 צמחוניים התקבל ממוצע רמתコレsterol 174.5 מ"ג. אם הוחלט לקבל את הטענה שצמחיים הם בעלי רמתコレsterol נמוכה יותר איזה סוג טעות אפשרית במסקנה?
- טעות מסוג ראשון.
 - טעות מסוג שני.
 - טעות מסוג שלישי.
 - לא ניתן לדעת כיון שאין לנו לידעים מה התוחלת האמיתית אצל הצמחוניים.

12) בסקר שנערך התקבל ש 60% מתוך 220 נשאלים מבקרים אצל השיננית לפחות פעם אחת בשנה. עבור אילו רמות מובהקות ניתן יהיה לקבוע שרוב האוכלוסייה מבקרת אצל השיננית לפחות פעם אחת בשנה?

- א. רמת מובהקות הגדולה מ-5%.
- ב. רמת מובהקות הקטנה מ-5%.
- ג. רמת מובהקות הגדלה מ-0.0015.
- ד. רמת מובהקות הקטנה מ-0.0015.

13) שני חוקרים העוסקים בתחום מחקרי משותף החליטו להסתמך על נתונים של מדגם שפורסם על ידי הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה.

חוקר א' ניסח השערה זו צדדית ואילו חוקר ב' ניסח השערה חד צדדית. מסקנתו של איזה מבין המשפטים הבאים הוא הנכון בנוגע למסקנות החוקרים?

- א. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס לא ניתן לדעת מה יחליט חוקר ב' באוטה רמת מובהקות.
- ב. אם חוקר א' קיבל את השערת האפס גם חוקר ב' קיבל את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ג. אם חוקר ב' ידחה את השערת האפס גם חוקר א' ידחה את השערת האפס באותה רמת מובהקות.
- ד. אם חוקר א' ידחה את השערת האפס גם חוקר ב' ידחה את השערת האפס בתנאי שרמת המובהקות כפולה בגודלה.

14) ידוע מנתוני העבר כי תוחלת הציונים בבחינה בפסיכולוגיה היא 79. הועלתה השערה כי תוחלת הציונים בקרב העולים החדשניים נמוכה יותר. לצורך בדיקת הטענה נלקח מדגם מקרי של 47 סטודנטים עולים ונמצא ממוצע של 75. מה משמעות הפרמטר בניסוח ההשערות?

- א. תוחלת ציוני העולים באוכלוסייה.
- ב. ממוצע ציוני העולים במדגם.
- ג. תוחלת ציוני האוכלוסייה מנתוני העבר.
- ד. ממוצע ציוני שאר האוכלוסייה במדגם.

15) חוקר ביצע מחקר וידוע כי עשה טעות מסווג 1. מה מהබאים נכון?

- א. החוקר דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה נכון.
- ב. החוקר דחה את השערת H_1 כאשר היא הייתה נכון.
- ג. החוקר לא דחה את השערת H_0 כאשר היא הייתה לא נכון.
- ד. המדגם של החוקר שייך בפועל להתפלגות הדגימה של H_1 .

16) חוקר ביקש לבחון האם תאומים זהים אשר הופרדו בילדותם שונים מתאומים זהים אשר גדלו יחדיו מבחינות מידת הפער בין התאומים בלחץ הדם. הוא דגם 20 זוגות תאומים מכל אוכלוסייה ומדד את הפרש בין לחץ הדם בכל זוג תאומים. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

- מבחן D למדגמים בלתי תלויים עם 38 דרגות חופש.
- מבחן T למדגמים מזוגיים, עם 39 דרגות חופש.
- מבחן D למדגמים בלתי תלויים עם 39 דרגות חופש.
- מבחן T למדגמים מזוגיים עם 38 דרגות חופש.

17) בינוואר השנה פורסם שהשכר הממוצע במשק הוא 900,9₪. במדגם שנעשה בחודש יוני על 60 עובדים רשום עבר כל עובד במדגם האם השכר שלו נמוך או לא נמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר. מהו המבחן המתאים כדי לבדוק שרוב העובדים בחודש יוני קיבלו שכר הנמוך מהשכר הממוצע שפורסם בחודש ינואר?

- מבחן Z על פרופורציה.
- מבחן T על תוחלת אחת.
- מבחן T על שתי תוחלות במדגמים בלתי תלויים.
- מבחן T על שתי תוחלות במדגמים תלויים.

18) שלושה חוקרים רצו לבדוק את השפעתו של שידור פרסומות נגד תאונות דרכים על מהירות הנהיגה של נהגים בישראל (השינויים של מהירות הנהיגה בישראל אינה ידועה). עידו השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים אחת, חודש לפני שידור הפרסומות וחודש לאחר שידור הפרסומות. רון השווה את מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שראו את הפרסומות, ל מהירות הנהיגה של קבוצת נהגים, שלא ראו את הפרסומות. יואב השווה את מהירות הנהיגה הממוצעת בישראל על פי נתוני משרד התחבורה. הפרסומות, ומהירות הנהיגה הממוצעת בישראל להשתמש הם :

- שלושתם במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- עידו במבחן T למדגמים מזוגיים, רון ויואב במבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- עידו במבחן T למדגמים מזוגיים, רון במבחן T למדגמים בלתי תלויים ויואב במבחן T למדגם יחיד.
- עידו במבחן T למדגמים מזוגיים, רון ויואב במבחן T למדגם יחיד.

19) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5%. מה תמיד נכון?

- א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
- ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
- ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
- ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

20) חוקר ערך מבחן דו צדי ברמת מובהקות של α והחליט לדוח את השערת האפס. אם החוקר היה עורך מבחן חד צדי ברמת מובהקות של $\frac{\alpha}{2}$ איזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחתה.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחתה.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

21) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגמים.

ליאור השתמש בטבלה של התפלגות Z.

רוני השתמשה בטבלה של התפלגות T.

מה יוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם?

- א. אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
- ב. אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
- ג. שני החוקרים בהכרח הגיעו לאותה מסקנה.
- ד. לא ניתן לדעת על היחס בין דחינת השערת האפס של שני החוקרים.

22) נתון ש $(\sigma^2, \mu) \sim N$ כמו כן נתונים ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שככל 10 תוצאות. σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדוח את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תוצאות וiscalל את תוצאות אלה גם למדגם כך שככל עכשו 15 תוצאות.

- א. כתע בברור הוא ידחה את השערת האפס.
- ב. כתע הוא דוקoa קיבל את השערת האפס.
- ג. כתע לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

23) אם חוקר החליט להגדיל את רמת המובהקות במחקר שלו איזי:

- א. הסיכוי לטעות מסוג ראשוני גדול.
- ב. העוצמה של המבחן גבוהה.
- ג. הסיכוי לטעות מסוג שני��大.
- ד. תשובות או-וב נכונות.

24) חוקר ביצע מחקר ובו עשה טעות מסווג שני לכך :

- השערת האפס נכונה.
- השערת האפס נדחתה.
- השערת האפס לא נדחתה.
- אף אחת מהתובשות לא נכון בהכרח.

25) מה המצב הרצוי לחוקר המבצע בבדיקה השערה :

- | | |
|----------|-------------|
| α | $1 - \beta$ |
| א. גדולה | גדולה |
| ב. גדולה | קטנה |
| ג. קטנה | גדולה |
| ד. קטנה | קטנה |

26) נערך שינוי בכלל החלטה של בדיקת השערה מסוימת ובקבוקתו אוזור דחיה H_0 קטן. כל שאר הגורמים נשארו ללא שינוי. כתוצאה מכך :

- הן α , והן $(\beta - 1)$, יקטנו.
- α יישאר ללא שינוי ואילו $(\beta - 1)$ יגדל.
- α יגדל ואילו $(\beta - 1)$ יקטנו.
- הן α והן $(\beta - 1)$ יגדלו.

27) ידוע כי לחץ דם תקין באוכלוסייה הוא 120. רופא מניה שלחץ הדם בקרוב עיתונאים גבוה יותר מה ממוצע באוכלוסייה. הואלקח מדגם של 60 עיתונאים וקיים ממוצע 137. על סמך המדגם, הוא בודק טענתו ברמת מובהקות 0.02 ומסיק שלחץ הדם בקרוב העיתונאים אינו גבוה יותר. מה הטעות האפשרית שהרופא עושה?

- טעות מסווג ראשון.
- טעות מסווג שני.
- טעות מסווג שלישי.
- אין טעות במסקنته.

28) בבדיקה השערות התקבל שה- $p-value = 0.02$. מה תהיה מסקנת חוקר המשמש ברמת מובהקות 1%? בחר בתשובה הנכונה :

- יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
- ידחה את השערת האפס מקרה.
- ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הינו דו צדדי.
- לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.

29) מובಹקות התוצאות (PV) היא גם :

- א. רמת המובಹקות המינימאלית לדוחות השערת האפס.
- ב. רמת המובಹקות המקסימאלית לדוחות השערת האפס.
- ג. רמת המובಹקות שנקבעת מראש על ידי החוקר טרם קיבל את תוצאות המחקר.
- ד. רמת המובಹקות המינימאלית לאי דוחות השערת האפס.

30) בבדיקה השערות מסוימת התקבל $p value = 0.0254$, לכן :

- א. ברמת מובಹקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את H_0 .
- ב. ברמת מובಹקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את H_0 .
- ג. ברמת מובಹקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את H_0 .
- ד. ברמת מובಹקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את H_0 .

31) רמת המובಹקות במחקר הייתה 2% לכן.

- א. בסיכוי של 2% נדחה את השערת האפס.
- ב. בסיכוי של 2% לא נדחה את השערת האפס.
- ג. בסיכוי של 2% השערת האפס לא נכונה.
- ד. אף תשובה לא נכונה.

32) נתון ש: $(\mu, \sigma^2) \sim N$. כמו כן נתונות ההשערות הבאות: $H_0: \mu = \mu_0$, $H_1: \mu < \mu_0$.

חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.

σ^2 לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדוחות את השערת האפס ברמת מובಹקות של 5%. אם הוא היה מגדיל את רמת המובಹקות ל-10% אזי:

- א. כעת בוורור הוא ידחה את השערת האפס.
- ב. כעת הוא דוחוק לקבל את השערת האפס.
- ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

33) לצורך בדיקת השפעת היפנוזה על לימוד אנגלית, נבחרו 10 זוגות תאומים זהים. אחד התאומים למד אנגלית בהשפעת היפנוזה, והשני ללא היפנוזה.

לאחר מכן נערכן לשניהם מבחן באנגלית. ננית שצינוי המבחן מתפלגים נורמללית ללא ידיעת השונות האטומית. מספר דרגות החופש במבחן הוא:

- א. 9
- ב. 19
- ג. 18
- ד. 8

(34) בתקנת טיפת חלב מסוימת יש שני מכשירי שקילה. על מנת להשוות בין שני המשקלים נדגו 4 תינוקות. כל תינוק בן חודשיים נשקל בכל אחד מהמשקלים. להלן תוצאות השקילה (בק"ג) :

משקל במיכסир 1	4.5	9.6	0.7	2.5
משקל במיכסир 2	3.5	6.9	1.7	0.5

נניח שהמשקלים מתפלגים נורמלית.

המבחן שיש לבצע כאן הוא :

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזוגים.

(35) כדי להשוות בין שני אצנים נדגו 5 תוצאות מריצת 100 מטר של כל אצן. זמני הריצה נרשמו ויש להניח שמתפלגים נורמלית. המטרה להשוות בין האצנים.

המבחן שיש לבצע כאן הוא :

- א. מבחן Z למדגם יחיד.
- ב. מבחן T למדגם יחיד.
- ג. מבחן T למדגמים בלתי תלויים.
- ד. מבחן T למדגמים מזוגים.

(36) סטטיסטיκאי ערך מבחן סטטיסטי. הוא חישב את עצמת המבחן וקיבל 0. המשמעות של תוצאה זו היא :

- א. לעולם לא לדוחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.
- ב. תמיד לדוחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- ג. לעולם לא לדוחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- ד. תמיד לדוחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

(37) סטטיסטיκאי נתקבש לאמוד את הפרש הממוצעים של שני טיפולים לפי שני מדגמים מקרים בלתי תלויים. הוא חישב רוחסן סמך להפרש ברמת סמך 0.98 וקיבל את הרוחסן $\mu_2 - \mu_1 < 4.5$. אילו יתבקש החוקר לבדוק לפי אותן

נתונים את השערות : $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$; $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$,

ברמת מובהקות 0.05 מסקנתנו תהיה :

- א. לדוחות את השערת האפס.
- ב. לא לדוחות את השערת האפס.
- ג. שלא ניתן לדעת את המסקנה עבור רמת מובהקות 0.05.
- ד. שלא נתנות בשאלת סטיות התקן של האוכלוסיות, ולכן לא ניתן להסיק דבר.

38) במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין קוווי זהב לבזק מבחינת ממוצע המחרירים לשיחות בינייל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקט שיחה. בהנחה והמחרירים מתפלים נורמלית בנו רוח סמך לממוצע ההפרשים וקיבלו: $\bar{x} = 0.2145$, $s_d = 0.0293$. רוח הסמך הוא ברמת סמך של 95%. לכן מסקנת המחקר היא:

- ברמת מובהקות של 5% לא נוכל לקבוע שקיים הבדל בין החברות.
- ברמת מובהקות של 5% נקבע שקיים הבדל מובהק בין החברות.
- לא ניתן לדעת מה המסקנה ברמת מובהקות של 5% כיון שלא נאמר מה ההגדרה של D .

39) אם רמת מובהקות של מבחן סטטיסטי הינה 0, הכוונה היא:

- תמיד נדחה H_0 כאשר היא נכונה, אך לא תמיד נדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- לא נדחה את H_0 אף פעם.
- לא נדחה את H_0 כאשר היא נכונה אך יתכן ונדחה אותה כאשר היא לא נכונה.
- כל התשובות לא נכונות.

40) חוקר ביצע ניסוי. הוא ניסח את ההשערות הבאות: $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$. לצורך בדיקה הואלקח מוגרבי בגודל 5 מתוך אוכלוסייה המתפלגת נורמלית עם שונות לא ידועה. על סמך תוצאות המוגרם הוא חישב וקיבל: $t_{\bar{x}} = -2.63$. לכן המסקנה היא:

- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1 אך לא כן ברמת מובהקות 0.05.
- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.05 אך לא כן ברמת מובהקות 0.025.
- הוא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.025 אך לא כן ברמת מובהקות 0.01.
- הוא לא ידחה H_0 ברמת מובהקות 0.1.

41) האיגוד האמריקני לרפואת ילדים מפרסם הנחיות חדשות הקובעות כי יש ליטול תוספת יוד במהלך תקופת ההריון וההנקה. מחסור במינרל זה עלול לגרום לפגיעה מוחית אצל העובר והתינוק. החלטה זו נקבעה על סמך מחקר בו השתתפו 1050 נשים שנטלו יוד במהלך תקופת ההריון וההנקה. מתווך הנשים שהשתתפו במחקר, רק ל-21 נמצאו ילדים בעלי פגיעה מוחית לעומת 3% באוכלוסייה הכללית. בנוסף, פורסם שהאיגוד האמריקאי מגיע למסקנותיו על סמך רמת מובהקות של 0.5%. מה הסיכוי לבצע טעות מסווג ראשון במחקר?

- 0.005
- 0.03
- 0.0287
- 0.05

- 42)** חוקרת שיערה, כי משקלן של נשים כשנה לאחר החתונה גבוהה ממשקלן בעת החתונה. החוקרת דגמה 15 נשים, ובדקה את משקלן בשתי נקודות הזמן (בעת החתונה, ו שנה לאחריה), אך לא מצאה הבדל מובהק ברמת מובהקות 0.01. בהנחה, כי במציאות השערתה של החוקרת נכונה, סביר כי אם היא תגדיל את גודל המדגם, אז:
- יקטן הסיכוי לטעות מסווג שני (β).
 - תגדל רמת הביטחון ($\alpha - 1$).
 - אף תשובה לא נכונה.
 - כל התשובות נכונות.

43) איזה מה המשפטים הבאים נכון תמיד?

- $\text{POWER} + \alpha + \beta = 1$
- $\text{POWER} = 0.5 - \beta$
- $\text{POWER} + \alpha = 1$
- $\beta + \alpha = 1$
- הcoil לא נכון.

- 44)** מה נכון לомер לגבי הנחת שיוויון השווניות במחן T למדגים בלתי תלויים?
- היא אומרת שהשווניות המדגימות שוות.
 - בלעדיה אין שום דרך לבדוק השערת על הפרש בין תוחלות.
 - היא חשובה הן עבור מדגים מזוגים והן עבור מדגים בלתי תלויים.
 - אף תשובה אינה נכונה.

- 45)** חוקר החליט לא לדוחות השערת ברמת מובהקות של α . במידה וחוקר זה היה בודק השערת זו ברמת מובהקות של $\alpha/2$ על סמך אותם נתונים, האם ההשערה תדחה?
- ההשערה תדחה.
 - ההשערה לא תדחה.
 - התשובה תליה בעוצמת המבחן.
 - לא ניתן לדעת בוודאות אם ההשערה תדחה או לא.

- 46)** חוקרת שיערה, כי בגילאי הגן בנות יותר תקשורתית מבנים. אם החוקרת תדגום אקראית 30 בנים ו-30 בנות, ובמדגם יתקבל אותו ממוצע של ציון תקשורת. סטטיסטי המבחן יהיה:

- אפס
- חיובי
- שלילי
- לא ניתן לדעת

47) עצמה שווה ל-1 פרושה :

- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- תמיד לדחות את השערת האפס כאשר היא נכונה.
- לעולם לא לדחות את השערת האפס כאשר היא לא נכונה.

48) מה מהבאים נכון לגבי מבחן T מוגדים מזווגים?

- כל התצפיות במחקר אינן תלויות זו בזו.
- כל התצפיות במחקר תלויות זו בזו.
- כל הצמידים של תצפיות במחקר אינם תלויים זה זה.
- התצפיות בתוך כל צמד אינן תלויות זו בזו.

49) לבדיקת ההשערה חד צדדית על התוחלת של התפלגות נורמלית $\mu \geq 10$, $H_0: \mu = 10$. נלקח מבחן והתקבלה רמת מובהקות מינימאלית לדחיה השערת האפס 0.058. לו רצינו לבדוק את ההשערה הדו צדדית $\mu \neq 10$, $H_1: \mu = 10$, אז על סמך תוצאות אותו המבחן ברמת מובהקות 0.05:

- ניתן להכיריע בין ההשערות רק אם שונות האוכלוסייה נתונה.
- מקבלים את השערת האפס.
- זוחים את השערת האפס.
- לא ניתן להכיריע בין ההשערות שכן חסרים נתונים.

50) לבדיקת ההשערה חד צדדית ימנית $\mu = 55$, $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu > 55$. נלקח מבחן מקרי בגודל n מאוכלוסייה בעלת התפלגות נורמלית ושונות σ^2 . רמת המובהקות היא 5%. נמצא שהעוצמה היא 0.9. להלן 3 טענות:

- עבור מבחן בגודל n ורמות מובהקות 5% לבדיקת ההשערות:
 - עבור מבחן בגודל n $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 60$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
 - עבור מבחן בגודל n ורמות מובהקות 5% לבדיקת ההשערות:
 - עבור מבחן בגודל n $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה גדולה מ-0.9.
 - עבור מבחן בגודל n ורמות מובהקות 10% לבדיקת ההשערות:
 - עבור מבחן בגודל n $H_0: \mu = 55$, $H_1: \mu = 65$ העוצמה תהיה קטנה מ-0.9.
- שלושת הטענות אינן נכונות.
 - טענות 2 ו-3 אינן נכונות וטענה 1 נכונה.
 - טענת 1 ו-2 נכונות וטענה 3 אינה נכונה.
 - טענות 1 ו-3 אינן נכונות וטענה 2 נכונה.

תשובות סופיות:

שאלה	תשובה	שאלה	תשובה	שאלה
א	26	א	א	1
ב	27	ד	ד	2
א	28	ד	ג	3
א	29	א	א	4
ג	30	ג	ג	5
ד	31	ג	ג	6
א	32	א	א	7
א	33	ב	ב	8
ד	34	ג	ג	9
ג	35	א	א	10
א	36	א	א	11
ג	37	ג	ג	12
א	38	א	א	13
ג	39	א	א	14
א	40	א	א	15
א	41	א	א	16
א	42	א	א	17
ה	43	ג	ג	18
ד	44	א	א	19
ד	45	ג	ג	20
א	46	ב	ב	21
ד	47	ג	ג	22
ג	48	ד	ד	23
ב	49	ג	ג	24
ד	50	ג	ג	25

סטטיסטיקה

פרק 20 - מבחני חי בربוע

תוכן העניינים

1. מבחון טיב התאמה	176
2. מבחון טיב התאמה והקשר שלו לבדיקת השערות על פרופורציה אחת	181
3. מבחון לאי תלות.....	183
4. קשר בין מבחון אי תלות לבדיקת השערות להפרש פרופורציות.	188
5. ניתוח פלטים ב מבחון אי תלות	190

מבחן טיב התאמה – רקע

מבחן זה בא לבדוק האם אוכלוסייה מסוימת מתפלגת לפי התפלגות נתונה. המשתנה הנחקר מחולק למספר קטגוריות ויש לבדוק האם תוצאות המדגמים תואמות להתפלגות הנתונה.

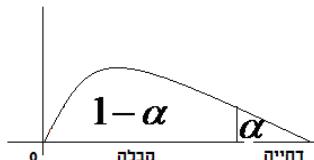
מבנה המבחן:

השערות:

- . המשתנה מתפלג לפי התפלגות מסוימת - H_0 .
- . אחרת - H_1 .

כלל הכרעה:

הערך הקритי נקבע על סמך התפלגות Chi בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $K-1$, כאשר $K = d.f$ – מספר הקטגוריות.



הערך הקритי הוא: $\chi^2_{1-\alpha, K-1}$, כלומר האחוזון $1-\alpha$ בתפלגות Chi בריבוע שדרגות החופש הן $K-1$.
אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, K-1}$, דוחים את השערת האפס.

$$\text{סטטיסטי המבחן: } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

O_i - שכיחות שנצפתה במדגם בקטgorיה i .

p_i - הסתברות לקטgorיה i לפי השערת האפס.

$E_i = np_i$ - שכיחות צפואה במדגם לקטgorיה i בהנחה השערת האפס.

הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמכות עד שהתנאי יתקיים.

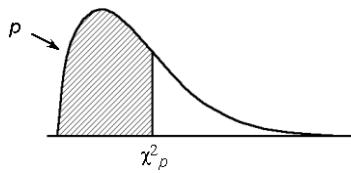
דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במדינה מסוימת שלוש מפלגות. בפרלמנט הנוכחי התפלגות מספר המושבים היא 30% למפלגה A, 60% למפלגה B ו-10% למפלגה C.

לקראת הבחירות המתוכנות בשבוע הבא נעשה סקר שככל 300 אזרחים.

בסקר התקבל ש-40% יצביעו למפלגה A, 50% למפלגה B ו-10% למפלגה C.

האם תוצאות הסקר תואמות להתפלגות המושבים בפרלמנט הנוכחי?
בדקו ברמת מובהקות של 5%.

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה


df	<i>p</i>												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.0 ⁴ 393	0.0 ³ 157	0.0 ³ 982	0.0 ² 393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות

- 1)** במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים. התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו-17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- 2)** מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, יroke וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורצית הסוכריות הכהולות גדולת פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 יrokeות והיתר כתומות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- 3)** משרד החינוך צוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמית הוא 1:2:1 בהתאם. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה.
 א. על סמך נתונים המדגם, האם התפלגות ההשכלה היא כמו משרד החינוך מפרש? בדוק ברמת מובהקות של 5%.
 ב. בנו רוח סמך ברמת סמך של 95% לפרופורצית השכירים במשק בעלי השכלה אקדמית.
- 4)** 200 איש נקבעו לבחור ספרה באקראי והנה התוצאות שהתקבלו:
 18 איש בחרו בספרה 0, 24 איש בחרו בספרה 1, 17 איש בחרו בספרה 2, 19 איש בחרו בספרה 3, 20 איש בחרו בספרה 4, 18 איש בחרו בספרה 5, 22 איש בחרו בספרה 6 והיתר בחרו בספרות 7-9.
 א. על סמך התוצאות הללו האם בחרית הספרות אקראית?
 בדקו ברמת מובהקות של 2.5%.
 ב. תננו הערכה למובהקות התוצאה.
 ג. אם נגדיל את גודל המדגם פי 2 ונשמר על אותם יחסים של כמות האנשים במדגם שבחרו בספרות, כיצד הדבר ישפיע על ערכו של הסטטיסטי χ^2 ? מה תהיה המסקנה במקרה זה?
- 5)** מעוניינים לבדוק האם קובייה היא הוגנת. הטילו את הקובייה פעמיים והתבוננו בסכום הוצאות. חזרו על התהליך 72 פעמים.
 להלן התוצאות שהתקבלו במדגם:
 מה המסקנה ברמת מובהקות של 5%?

סכום הוצאות	מספר הטלות
20	2-5
17	6-8
20	9-10
15	11-12

6) בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי

שכיחות	3 ומעלה	2	1	0	מספר הסוללות הפגומות
	8	12	104	276	

השכיחיות הבאות:

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות המדגם האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נזכיר שהסיכוי לסללה פגומה אינו 20%?

7) מטילים מטבע עד שלראשונה מתקבל "ראש". חוזרים על התהילה 120 פעמים.

נסמן ב- X את מספר ההטילות עד קבלת הראש. להלן התוצאות שהתקבלו:

X	1	2	3	4	5	6
	54	20	16	22	6	2

א. בהנחה והמטבע הוגן, מהי ההסתפלגות של X ?

ב. בדקו האם המטבע הוגן, על סמך תוצאות המדגם ברמת מובהקות של 5%.

8) להלן השערות מחקר $H_0 : X \sim N(40, 2^2)$, $H_1 : \text{else}$: תוצאות המדגם הן:

מעל 44	40-44	36-40	36 מתחת	X	מספר הדגימות
2A	45A	50A	3A		

מהו ערכו המקסימלי של A עבורו קיבל את H_0 ברמת מובהקות של 5%?

תשובות סופיות

1) לא נדחה H_0 .

2) לא נדחה H_0 .

3) א. לא נדחה H_0 .

ב. בין 0.95 ל-0.975.

4) א. לא נדחה H_0 .

ג. גודל פי 2; המסקנה לא תשתנה.

5) נזכיר שהקוביות אינה הוגנת.

6) 0.005

7) א. $X \sim G(0.5)$.

8) .14

הקשר בין מבחן טיב התאמה לבדיקת השערות על הפרופורציה – רקע

אם אנו רוצחים לבצע מבחן טיב התאמה על משתנה שיש לו שתי קטגוריות בלבד (משתנה דיקוטומי), הדבר זהה לתהליך של בדיקת השערות דו צדדיות על פרופורציה בודדת.

דוגמה (פתרונות בהקלטה) :

הטילו מطبع 80 פעמים וקיבלו 48 פעמים את התוצאה "ראש".
בדקו האם המطبع הוא הוגן ברמת מובהקות של 5%.

- א. באמצעות מבחן טיב התאמה.
- ב. באמצעות מבחן Z לפרופורציה בודדת.

שאלות

- 1)** בסקר שנעשה על 320 נשאלים, 43.75% טענו שהחיה המועדף עליהם היא כלב. עד היום היה נהוג לחשב ש40% מהאנשים מעדיפים כלבים. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסקר יישנה את הסברת שהייתה נהוגה עד היום לגבי העדפת כלב.
- באמצעות מבחן טיב התאמה.
 - באמצעות מבחן על פרופורציה.
- 2)** לSOCNOOT מכוניות שלושה סניפים ברחבי הארץ. המכוניות נמכרות בסניפים השונים. מתוך 100 מכוניות נמצא ש-65 נמכרו בסניף תל-אביב, 23 בסניף ירושלים והיתר בסניף חיפה.
- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שיעור המכוניות שנמכרות בסניף ת"א גדול פי 2 מכל סניף אחר.
 - בדקו באמצעות מבחן טיב התאמה האם 60% מהמכוניות נהוגות להימכר בסניף תל אביב. האם יש דרך לבדוק את ההשערה?
- 3)** בתחרות ריצה בית ספרית שלושה מסלולי ריצה. ב-50 תחרויות בדקו באיזה מסלול היה הניצחון. התוצאות שהתקבלו מסוימות בטבלה הבאה:
- | מסלול | 1 | 2 | 3 |
|----------------|----|----|----|
| מספר הניצחונות | 20 | 15 | 15 |
- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם יש מסלול מועדף לניצחון.
 - בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הסיכוי לנצח במסלול מס' 1 גבוה מ- $\frac{1}{3}$.

תשובות סופיות

- 1)** לא נזחה H_0 .
- 2)** א. נזחה H_0 .
- 3)** א. לא נזחה H_0 .

מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

אין תלות בין המשתנים H_0 .

יש תלות בין המשתנים H_1 .

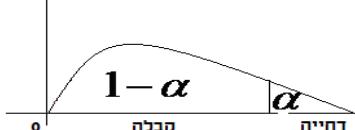
כלל הכרעה:

הערך הקритי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש $(r-1)(c-1)$.
 כאשר: r - מספר הקטגוריות של המשתנה שبشורות.
 c - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקритי הוא: $\chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$, קלומר האחזוון ה- α – בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן $(r-1)(c-1)$ אם $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(r-1)(c-1)}$ או דוחים את השערת האפס.

$$\text{סטטיסטי המבחן: } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

כאשר:



O_i - השכיחות נצפית במדגם בתא i .

E_i - שכיחות צפואה במדגם בתא i בהנחה השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

הערה:

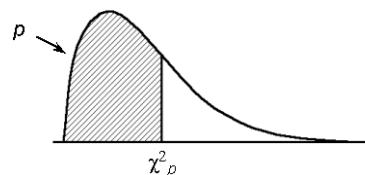
תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $5 \geq E_i$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמכות עד שהתנאי יתקיים.

תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין יותר מ 20% מהתאים E קטנים מ-5.

דוגמה (הפתרון בהקלטה) :

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?
יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר :

המגדר / דעתה	סה"כ	נמנע	נגד	بعد	גברים
נשים	20	60	20	50	10
סה"כ					

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p


df	p												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.04393	0.03157	0.03982	0.0393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

שאלות

1) נבדקה ה תלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים.

להלן התוצאות:

סה"כ	גבואה	ביןונית	נמוכה	שביעות רצון	גודל המפעול
600	215	203	182		גודל
400	136	110	154		קטן
1000	351	313	336		סה"כ

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפוגמים והתקינים בכל

אחד מן המשמרות לפי דגם שנעשה:

	יום	ערב	לילה
פוגמים	50	60	70
תקינים	600	700	800

האם יש הבדל בין שיעורי הפוגמים במשמרות השונות?

הסיקו עבור רמת מובהקות של $\alpha = 0.05$.

3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו

לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא.

האם יש קשר בין להיות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר?

בדקו ברמת בטחון של 95%.

4) במטרה לבדוק האם השתנו דפוסי החכבה למפלגות השונות בשבוע שעבר

לשבוע נלקחו שני סקרים אחד מהשבוע שעבר והآخر מהשבוע.

להלן דפוסי החכבה שהתקבלו בסקרים אלה.

א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה ניתן להחליט שהשתנו דפוסי החכבה בשבוע שעבר לשבוע באופן מובהק?

ב. כיצד הייתה התשובה לסעיף א' משתנה אם כל השכיחויות בטבלה של תוצאות המדגם היו מוכפלות פי 2?

ג. בנו רוח סמך לשיעור המצביעים למפלגה א' בשבוע ברמת סמך של 95%.

סה"כ	מפלגה א'	מפלגה ב'	מפלגות אחרות	שבוע שעבר
550	253		143	השבוע
1050		314	243	סה"כ

- 5) בוחנות בגדים A בדקו את התפלגות הצבעים של הבגדים הנמכרים ביום מסוים. כמו כן בדקו את התפלגות הצבעים בוחנות שכנה B :

מספר פריטים / צבע	כחול	אדום	לבן	שחור	אדום
חנות A	50	15	20	15	
חנות B	20	10	20	60	

- A. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם התפלגות הצבעים בוחנות A היא ביחס של 1:1:1:3 לטובת הכחול.
- B. בדוק ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים הבדל בין הוחנות מבחינה התפלגות הצבעים של הפריטים הנמכרים.

- 6) סטודנט קיבל בבדיקה השערות ערך χ^2 (chi-square) השוו לאפס. הסטודנט הסיק כי לא קיימת תלות בין שני המשתנים שבדק, בכל רמת מובהקות. נכון / לא נכון? נמקו.

- 7) להלן טבלה O של שני משתנים שהתקבל במדגם כלשהו :

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200					X_1
200					X_2
	160	120	60	60	$f(y)$

מה צרכות להיות השכיחויות בתוך הטבלה כדי שМОבהקות התוצאה (PV) תהיה 100%?

תשובות סופיות

- 1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.
- 2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.
- 3) נסיק שאין קשר בין היות מוצר ליצוא למועד שבו הוא יוצר.
- 4) א. 10% ב. קטן ג. (0.223,0.297)
- 5) א. נסיק שההתפלגות הצבעים בוחנות היא כמו שמצוין.
ב. נסיק שיש הבדל בין הוחנות מבחינה התפלגות הצבעים.
- 6) נכון
7) להלן טבלה :

$f(x)$	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1	
200	80	60	30	30	X_1
200	-8	60	30	30	X_2
400	160	120	60	60	$f(y)$

הקשר בין מבחנים לאי תלות ובדיקה השערות להפרש פרופורציות – רקע

מבחן לאי תלות שבו לכל משתנה יש שתי קטגוריות שקול לבדיקת השערות זו צדדיות על הפרש פרופורציות כאשר השערת האפס היא שהפרופורציות שוות. כל זאת, כמובן, אם התנאים ל מבחנים מתקיימים.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בקרוב מוגם של 200 נשים 120 טענו שהן תכובנה למועמד R בראשות העיר. בקרוב מוגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? האם אפשר לבדוק זאת גם על ידי מבחן לאי תלות וגם על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות?

שאלות

- 1) בקרוב מוגם של 200 נשים 120 טענו שהן תכובנה למועמד R בראשות העיר. בקרוב מוגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים?
 - בדוק ברמת מובהקות של 5%.
 - א. על ידי מבחן לאי תלות.
 - ב. על ידי בדיקת השערות לשתי פרופורציות.

- 2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצביעו שהם עוסקים בפעילויות גופנית סידירה. מתווך אלו שעוסקים בפעילויות גופנית סידירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתווך אלו שלא עוסקים בפעילויות גופנית סידירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.
 - א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנוטונים שהוצעו בשאלת.
 - ב. האם ניתן להגיד שהסיכוי להימצא במצב בריאותי תקין גבוה יותר כאשר עוסקים בפעילויות גופנית סידירה לעומת המצב שלא עוסקים בפעילויות גופנית סידירה? בדוק ברמת בטחון של 90%.

תשובות סופיות

- 1) נדחה את השערת האפס לפירוט הדרך ראה וידאו.
 2) א. להלן טבלה : ב. נדחה את השערת האפס.

	לא תקין	תקין	פעילות/מצב בריאותי
60	10	50	סדירה
140	50	90	לא סדירה
200	60	140	

פלטיטים על מבחן לאי תלות – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

מבנה המבחן:

השערות:

אין תלות בין המשתנים : H_0 .

יש תלות בין המשתנים : H_1 .

דרגות חופש : $d.f = (r-1)(c-1)$.

כאשר : r - מספר הקטגוריות של המשתנה שبشורות.

c - ספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

$$\text{סטטיסטי המבחן: } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

O_i - שכיחות נצפית במדגם בתא i .

E_i - שכיחות צפואה במדגם בתא i בהנחה השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

הערה:

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא $E_i \geq 5$ לכל i . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש

אפשרויות לאחד קטגוריות סמכות עד שהתנאי יתקיים.

תנאי חלופי: אין E קטן מ-1 וגם אין יותר מ 20% מהתאים E קטן מ-5.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

- במחקר רצוי לבדוק את הקשר בין צבע שיער לבין צבע עיניים של אנשים. הפלטים שהתקבלו מצורפים.
- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
 - ב. כמה קטגוריות יש לכל משתנה?
 - ג. רשמו את השערות המחקר.
 - ד. מה מספר דרגות החופש?
 - ה. כמה אנשים במדגם נמצאו עם שיער חום?
 - ו. כמה אנשים הייתה מזכה במדגם שהיה להם שיער חום ועיניים יroxות בהנחה ואין קשר בין צבע שיער לצבע עיניים?
 - ז. מתוך הבלונדיינים מה אחוז בעלי עיניים כחולות במדגם?
 - ח. מתוך בעלי עיניים יroxות מה אחוז הבלונדיינים במדגם?
 - ט. מה ערכו של סטטיסטי המבחן ומהי מובಹות התוצאה?
 - י. מה מסקנת המחקר? $\alpha = 5\%$

להלן הפלטים שהתקבלו:

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
hair_color * eye_color	78	100.0%	0	0.0%	78	100.0%

hair_color * eye_color Crosstabulation

		eye_color			Total
		brown	green	Blue	
hair_color	black	Count	13	7	27
		Expected Count	10.7	8.3	27.0
		% within hair_color	48.1%	25.9%	25.9%
	brown	% within eye_color	41.9%	29.2%	30.4%
		Count	12	12	30
		Expected Count	11.9	9.2	30.0
	blond	% within hair_color	40.0%	40.0%	20.0%
		% within eye_color	38.7%	50.0%	26.1%
		Count	6	5	21
Total	blond	Expected Count	8.3	6.5	21.0
		% within hair_color	28.6%	23.8%	47.6%
		% within eye_color	19.4%	20.8%	43.5%
	Total	Count	31	24	78
		Expected Count	31.0	24.0	78.0
		% within hair_color	39.7%	30.8%	29.5%
		% within eye_color	100.0%	100.0%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	5.880 ^a	4	.208
Likelihood Ratio	5.641	4	.228
Linear-by-Linear Association	2.682	1	.101
N of Valid Cases	78		

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6.19.

שאלות

- 1) בסקר שנעשה על ידי משרד ראש הממשלה נדגו 60 אזרחים. כל אזרח נשאל על מגדרו והאם הוא بعد הקמת מדינה פלסטינית.
- א. מה ההשערות הנבדקות ומהו סטטיסטי המבחן?
 - ב. אם סטטיסטי המבחן היה גדול כיצד הדבר היה משפייע על SIG שבפלט.
 - ג. האם קיים קשר בין מגדר ודעה ברמת מובהקות של 5%?
 - ד. מהו האומדן לאחוז התומכים במדינה פלסטינית מתוך הגברים?
 - ה. Aiיזה אחוז מהנשאלים שהיו بعد מדינה פלשתינית הם גברים?

להלן הפלטים :

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	1.973 ^a	2	.373
Likelihood Ratio	1.987	2	.370
Linear-by-Linear Association	1.882	1	.170
N of Valid Cases	60		

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 7.25.

gender * opinion Crosstabulation

		opinion			Total	
		yes	now	no opinion		
gender	Male	Count	10	10	9	29
		Expected Count	12.6	9.2	7.3	29.0
		% within gender	34.5%	34.5%	31.0%	100.0%
		% within opinion	38.5%	52.6%	60.0%	48.3%
		% of Total	16.7%	16.7%	15.0%	48.3%
	female	Count	16	9	6	31
		Expected Count	13.4	9.8	7.8	31.0
		% within gender	51.6%	29.0%	19.4%	100.0%
		% within opinion	61.5%	47.4%	40.0%	51.7%
		% of Total	26.7%	15.0%	10.0%	51.7%
	Total	Count	26	19	15	60
		Expected Count	26.0	19.0	15.0	60.0
		% within gender	43.3%	31.7%	25.0%	100.0%
		% within opinion	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
		% of Total	43.3%	31.7%	25.0%	100.0%

2) להלן פلت על סמך סקר שנעשה בקרב סטודנטים, בסקר נשאלו הסטודנטים על המוזיקה אותה הם מעדיפים וצורת הבילוי המועדף עליהם.

Crosstab

Count

		בילוי			Total
		קריאה	ספורט	睦עדיון	
מוזיקה	רוק	0	0	11	11
	פופ	1	6	8	15
	קלסי	5	6	9	20
Total		6	12	28	46

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	11.929 ^a	?	.018
N of Valid Cases	46		

a. 5 cells (55.6%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 1.43.

א. בין אלו משתנים נבדק הקשר? כמה קטגוריות לכל משתנה?

ב. האם התנאים של המודל מתקיים?

ג. מה מספר דרגות החופש בבדיקה הנ"ל?

ד. מה ההשערות של הבדיקה?

- (3) מחקר התענין לבדוק את הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבנייהות ארגניות. הפלטים מצורפים.
- השלימו את שלושת המספרים החסרים בטבלה (היכן שיש סימני שאלה).
 - מה ערכו של חי בריון הסטטיסטי.
 - תנו הערה למועדוקות התוצאות לבדוק הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבנייהות ארגניות.

רמת_הכנסה * צרךן עגבנייהות Crosstabulation

		צרךן עגבנייהות		Total
		לא ארגני	ארוגני	
הרבה מתחת לממוצע	Count	17	42	59
הכנסה_רמת within	% within	28.8%	?	100.0%
עצביות צרךן חיקוי	% within	13.6%	33.6%	23.6%
מתחת לממוצע	Count	27	22	49
הכנסה_רמת within	% within	55.1%	44.9%	100.0%
עצביות צרךן חיקוי	% within	?	17.6%	19.6%
ממוצע	Count	31	29	60
הכנסה_רמת within	% within	51.7%	48.3%	100.0%
עצביות צרךן חיקוי	% within	24.8%	23.2%	24.0%
מעל הממוצע	Count	44	26	70
הכנסה_רמת within	% within	62.9%	37.1%	100.0%
עצביות צרךן חיקוי	% within	35.2%	20.8%	28.0%
הרבה מעל הממוצע	Count	?	6	12
הכנסה_רמת within	% within	50.0%	50.0%	100.0%
עצביות צרךן חיקוי	% within	4.8%	4.8%	4.8%
Total	Count	125	125	250

- (4) חוקר בדק את הקשר בין צבע השיער לבין צבע העיניים בעזרת מבחן Chi בריבוע בקרב 52 נבדקים. תוצאות המבחן מוצגות בטבלה. בנוסף ידוע כי סטטיסטי המבחן שהתקבל מעיבוד הנתונים הוא 8.08.
- מה תהיה מסקנת המבחן ברמת מובהקות של 1%?
 - מה ערכו של E עבור עיניים כחולות וצבע שיער כהה.
 - מה יהיה בקירוב ערכו של מקדם המתאים של קרמר?
 - מהי פרופורציה בעלי צבע שיער הבוחר מקרב בעלי העיניים הירוקות?

להלן הפלט:

צבע עיניים * צבע שיער Crosstabulation

		צבע שיער		Total
		כהה	בהיר	
צבע עיניים	כחול	Count		
		% within		50.0% 100.0%
		% within		21.6% 30.8%
		% of Total		15.4% 30.8%
חום	חום	Count		
		% within		83.3% 100.0%
		% within		27.0% 23.1%
		% of Total		19.2% 23.1%
ירוק	ירוק	Count		
		% within		79.2% 100.0%
		% within		51.4% 46.2%
		% of Total		36.5% 46.2%
Total		Count		
		% within		71.2% 100.0%
		% within		100.0% 100.0%
		% of Total		71.2% 100.0%

- 5) במחקר מסוים רצוי לבדוק האם יש קשר בין המגדר להוצאה על לבוש במשך שנה. דגמו באופן מקרי גברים ונשים ובדקו את רמת ההוצאה שלהם על לבוש השנה האחרונות. חוקר א' בדק האם קיימים הבדלים תוחלוטים בהוצאה בין גברים לנשים. חוקר ב' קיבץ את ההוצאה לקטגוריות ובאופן הזה בדק האם קיימים הבדלים בתפלגות ההוצאה בין גברים לנשים.
- הקטגוריות חולקו לשולש קבוצות הוצאה.
- איזה פלט מתאים לאיזה אחד מהחוקרים? נמקו.
 - מה מסקנתו של חוקר א'? בדקו ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$. (רשמו השערות, נחו הנחות, ציינו כלל החלטה ותנו מסקנה במונחי המשתנים).
 - איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר א'?
נחו את הטעות במונחי השאלה.
 - מהי מסקנתו של חוקר ב'? בדקו ברמת מובהקות $\alpha = 0.05$. (רשמו השערות, נחו הנחות, ציינו כלל החלטה ורשמו מסקנה במונחי המשתנים).
 - איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר ב'? נחו זאת במונחי השאלה.
 - כיצד ניתן ליישב את מסקנות שני החוקרים?

להלן פלט ראשון:

T-Test

Group Statistics

gender	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
female	40	2.9000	1.15025	.18187
male	40	2.6000	2.52982	.40000
dimension n1				

Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						95% Confidence Interval of the Difference	
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference			
								Lower	Upper	
expese	Equal variances assumed	16.805	.000	.683	.78	.497	.30000	.43941	-.57479	1.17479
				.683	54.464	.498	.30000	.43941	-.58078	1.18078

להלן פلت שני:

Crosstabs

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
gender * category	80	100.0%	0	.0%	80	100.0%

gender * category Crosstabulation

		category			Total	
		a	b	c		
gender	Female	Count	2	30	8	40
		Expected Count	11.0	21.0	8.0	40.0
		% within gender	5.0%	75.0%	20.0%	100.0%
		% within category	9.1%	71.4%	50.0%	50.0%
	Male	Count	20	12	8	40
		Expected Count	11.0	21.0	8.0	40.0
		% within gender	50.0%	30.0%	20.0%	100.0%
		% within category	90.9%	28.6%	50.0%	50.0%
	Total	Count	22	42	16	80
		Expected Count	22.0	42.0	16.0	80.0
		% within gender	27.5%	52.5%	20.0%	100.0%
		% within category	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	22.442 ^a	2	.000
Likelihood Ratio	25.064	2	.000
N of Valid Cases	80		

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 8.00.

תשובות סופיות

- (1) א. 1.973 ב. קטן .
 ג. לא נדחה H_0 .
 ד. 34.5%
 ב. 38.5%
- (2) א. בילוי מועדף ומוזיקה מועדף עם 3 קטגוריות לכל משתנה.
 ב. לא
 ג. H_0 אין תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדף.
 ד. H_1 יש תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדף.
- (3) א. 21.6%, 71.2%
 ב. 15.8 ג. קטן מ-0.005.
- (4) א. לא נדחה H_0 .
 ב. 11.4 ג. 0.394
 ד. 20.8%
- (5) א. פלא אי- חוקר א', פלא ב'- חוקר ב'.
 ב. קיבל את H_0 .
 ג. טעות מסוג שני- הכרענו שאין הבדל בין גברים לנשים למרות שיש במציאות הבדל.
 ד. קיבל את H_1 .
- ה. טעות מסוג ראשון- הכרענו שיש קשר בין מין להוצאה למרות שבמציאות אין קשר.
 ו. כל חוקר פעל בשיטה סטטיסטית שונה ובמצב כזה יתכן מסקנות סותרות.

סטטיסטיקה

פרק 21 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

201 1. כללי

ניתוח שונות חד כיוונית

רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיווני) הוא מבחן להשוואת תוחלות (μ_1, \dots, μ_k) של k אוכלוסיות שונות. לכן, בניתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

הנחהות הדרושות לביצוע התהילה:

2) בכל אוכלוסייה מטוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2 .

4) המדגמים בלתי תלויים זה זהה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels).

כדי לבצע את התהילה יש לבצע מוגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- n_i את גודל המוגם בקבוצה i .

$$\sum_{i=1}^k n_i = n - \text{מספר התצפויות סך הכל (בכל המדגמים)}.$$

\bar{X}_i - ממוצע המוגם הראשון, ..., \bar{X}_k - ממוצע המוגם ה- k -י.

\bar{X} - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{s}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש df	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$	
T - סה"כ	SST	$n-1$		

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיה $F > F_{(k-1, n-k)} : 1-\alpha$: H_0

שאלות

- 1)** מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדיקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאב ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשולש: קבוצה 1 קיבלה "אקסמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטיגין" קבוצה 3 קיבלה "נוורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדיקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- מהו המשתנה תלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
 - מה הן הנקודות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?
- 2)** בעיר מסוימת שלושה בתים ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתים הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו בבחון הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעיר ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן הציונים שהתקבלו:
- | "הס" | "ריבין" | "המתלמיד" |
|------|---------|-----------|
| 85 | 98 | 78 |
| 83 | 62 | 65 |
| 74 | 55 | 70 |
| 85 | 80 | 90 |
| 75 | | 56 |
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? רשמו את ההנחות של המבחן.
 - מהו גודל המדגמים? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
 - חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהمدגמים.
 - מלאו את טבלת ANOVA.
 - רשמו את כלל ההכרעה לבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
 - האם קיים הבדל בין בתים הספר בעיר מבחינה רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמן הסעיפים הקודמים.
- 3)** מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טיפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות.
- | D | C | B | A | שיטת |
|-----|-----|-----|-----|------------|
| 12 | 8 | 14 | 12 | גודל המדगם |
| 182 | 180 | 172 | 178 | הממוצע |
| 3 | 5 | 8 | 4 | סטיית התקן |
- בטבלה המצורפת מראוצים מצאי המחקר.
- רשמו את השערות המחקר והנקודות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
 - מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
 - האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

- 4) שלושה אופים נתקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות. האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמן ההכנה של העוגות?

בדקו ברמת מובהקות של 5%.

שלוט	מוסס	ניר	האופה		
182	212	206	סכום הזמנים		
8982	11250	10644	סכום ריבועי הזמנים		

- 5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצוי לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורץ החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורץ החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרשיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

- 6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמדו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמדו ומסומנו באותיות.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7) חברת תרופות לκחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים לשולש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לκיקחת התרופה ניבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

ANOVA

pulse						pulse			
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Tukey HSD ^a			
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000	dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
Within Groups	126.000	12	10.500			30.00	5	71.0000	
Total	540.400	14				20.00	5	80.2000	

Means for groups in homogeneous subsets
are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

		pulse			
		Tukey HSD			
(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675 8.6675
	30.00	12.40000*	2.04939	.000	6.9325 17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675 2.2675
	30.00	9.20000*	2.04939	.002	3.7325 14.6675
30.00	10.00	-12.40000*	2.04939	.000	-17.8675 -6.9325
	20.00	-9.20000*	2.04939	.002	-14.6675 -3.7325

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושים לצורך פתרון.
- ב. הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם היינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- ג. האם יש צורך במחקר בהשואת מרובות. נמקו!
- ד. לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראית "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

8) בעיר מסוימת רצוי לבדוק האם קיימים הבדל ברמה של התלמידים בין בתיה הספר השונים בעיר. ביצעו מוגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפיעלו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על השעיפים הבאים:

- א. כמה בתים ספר יש בעיר?
- ב. כמה תלמידים השתתפו בסך הכל במחקר?
- ג. האם קיימים הבדל בין בתים הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
- ד. בביטחון של 95% אילו בתים ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

Oneway

ANOVA

grade	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

Post Hoc Tests

Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

Homogeneous Subsets

Scheffe ^a	school	N	grade	
			Subset for alpha = 0.05	
			1	2
	3.00	5	45.0000	
	4.00	5	45.4000	
	2.00	5		76.4000
	1.00	5		81.8000
	5.00	5		84.4000
	Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

תשובות סופיות

ב. ניתוח שונות חד כיווני

1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1: \text{otherwise}$$

משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שווין שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1: \text{otherwise}$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שווין שונות.

ב. גודל המדגמים : 14. משתנה בית : בית הספר, בעל 3 רמות.

$$\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29, \bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$$

ג. להלן טבלה :

F	MS	df	SS	מקור השונות
	100.3	2	200.6	B
	173.2	11	1904.75	W
0.58		13	2105.35	סה"כ

ה. $F > 3.98$.

ו. קיבל את H_0 .

ג. כן.

ב. נדחה את H_0 .

3) א. $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
 $H_1: \text{otherwise}$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שווין שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(4) קיבל את H_0 : נכريع שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1: \text{otherwise}$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שוניות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את H_0 : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

(6) להלן טבלה :

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2	178.725	ג	.000
Within Groups	165.5	17	9.735	ד	
Total	522.950	19			

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7) \text{ א.}$$

$$H_1: \text{otherwise}$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונייה.

נדחה את H_0 : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\text{ב. ראה וידאו.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ד. } \mu_{30} > \mu_{10} \quad \text{ה. } 25 \quad \text{ו. } 5 \quad (8) \text{ א.}$$

ג. נדחה את H_0 : יש לפחות שני בתים ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$\text{ד. } (\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) \quad .$$

סטטיסטיקה

פרק 22 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

210	1. הקדמה.....
220	2. אפקטים פשוטים , עיקריים ו互動אקטיביים.....
232	3. תהליך ניתוח שונות דו כיווני

ניתוח שונות דו-כיווני - הקדמה

רקע

ראשית, נחזר על עיקרי ניתוח השונות החד-כיווני (חד-גורמי). בניתוח השונות חד-כיווני יש משתנה תלוי יחיד, שהוא כמוותי, ומשתנה בלתי תלוי יחיד, שהוא משתנה קטגוריאלי (משתנה שהערכים שלו שייכים למספר סופי של קטגוריות). המשנה הקטורייאלי נקרא לעיתים גם גורם (פקטור), והקטגוריות שלו נקבעות רמות. המטרה בניתוח השונות חד-כיווני היא לבדוק האם גורם יש השפעה מובהקת על המשתנה תלוי. העשרה המחקר האפס של המחקר בניתוח השונות חד-כיווני היא שבכל הקטגוריות יש אותה התוחלת, וההשערה המחקר טעונה שיש לפחות שתי קטגוריות שבהן התוחלות שונות.

דוגמה: (פתרונו בהקלטה)

נבדקו שלושה סוגים דיאטאות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 30 מטופלים בעלי משקל עודף, והם חולקו באקראי לשולש קבוצות שוות בגודלו, כך שכל קבוצה קיבלה דיאטה נחקרה אחרת. בעבר שלושה חדשים בדקו את מספר הקילוגרמים שהפחית כל מטופל ממשקלו בתקופה זו. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם קיים הבדל בין הדיאטות מבחינה ההפחתה במשקל.

- מהו המשתנה תלוי במחקר?
- מהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? כמה רמות יש לו?
- מה הן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו מוסיפים עוד משתנה בלתי תלוי למחקר, כלומר עוד גורם שאנו רוצחים לבדוק איך הוא משפיע על המשתנה תלוי. לכן בניתוח שונות דו-כיווני יש משתנה תלוי כמוותי יחיד ושני משתנים בלתי תלויים שכל אחד מהם קטgorיאלי. כזכור, למשתנים הבלטי תלויים אנו קוראים גם גורמים (פקטורים), ומספר הקטגוריות של כל גורם נקרא גם מספר הרמות שלו. ניתוח שונות רב-כיווני או רב-גורמי הוא ניתוח שונות שבו יש יותר מגורם אחד, כלומר יותר ממשתנה בלתי תלוי קטgorיאלי אחד. בניתוח שונות דו-כיווני יש שני גורמים, בניתוח שונות תלת-גורמי יש שלושה גורמים וכו'. ככל שנוסף גורם, הניתוח הסטטיסטי יהיה מורכב יותר ויידרש יותר תצפיות למחקר אבל כיון שהוא יקטין את שונות הטבעיות (שונות מקרים) ייתן יותר הסבר לשונות הכללית, כך שהמבחן יהיה עצמאי יותר.

המשך הדוגמה:

מבין 30 המטופלים שבמחקר 15 היו גברים ו-15 היו נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 5 גברים ו-5 נשים.

מה הם המשתנים הבלתי תלויים? כמה רמות יש לכל משתנה?

בניתוח שונות דו-כיווני אנו בעצם רוצים לבדוק סימולטנית שלוש שאלות מחקר על אוכלוסיות כבדי המשקל:

- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה שימושו בדיאטות שונות?
- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה ממגדר שונה?
- האם יש השפעה מושלבת (איןטראקציה) של שני הגורמים הנבדקים על הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל, כלומר האם צירוף של דיאטה מסוימת ומגדר מסוים מביא להפחיתה משקל גדולה יותר או קטנה יותר מצירופים אחרים?

נסמן גורם אחד ב- a ואת מספר הרמות שלו ב- A . באותו האופן הגורם الآخر יסומן ב- b , ואת מספר הרמות שלו נסמן ב- B . מספר הקבוצות הכלול שאנו יוצרים הוא $A \cdot B$.

המשך הדוגמה:

- בחרו גורם אחד להיות a וגורם אחר להיות b . מהו A ומהו B ?
- כמה קבוצות שונות נוצרו במחקר?

נסמן ב- m את מספר התצפיות בכל תא (בנחה שהוא יהיה מספר קבוע). תא הוא שילוב של רמה מסוימת של גורם a עם רמה מסוימת של גורם b .

המשך הדוגמה:

- כמה תאים (קבוצות) יש במחקר?
- מה ערכו של m ?
- מהו הקשר המתמטי בין m לבין A , גודל המדגם?

נסמן ב- a_1 את הרמה הראשונה של a , ב- a_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.
 נסמן ב- b_1 את הרמה הראשונה של b , ב- b_2 את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.
 נסמן ב- μ_i את התוחלת ברמה i . נסמן ב- μ_j את התוחלת ברמה j . נסמן ב- μ_{ij} את התוחלת של תא ij .

המשך הדוגמה :

- מה המשמעות של μ_1 ושל μ_2 ?
- מה המשמעות של μ_{12} ושל μ_{21} ?

השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני

את השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני אפשר לרשום بصورة רבות :

לגורם a אין השפעה על המשתנה תלוי : H_0

אחרת : H_1

לגורם b אין השפעה על המשתנה תלוי : H_0

אחרת : H_1

אין אינטראקציה בין שני הגורמים : H_0

אחרת : H_1

דרך אחרת היא שימוש בתוחלות:

$$H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots = \mu_{A.}$$

אחרת:

$$H_0: \mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots = \mu_{.B}$$

אחרת:

אין אינטראקציה בין שני הגורמים:

אחרת:

המשך הדוגמה:

אם אנחנו מעוניינים לבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה הן ההשערות הנחקרוות?

שאלות

- 1)** בחברת טקסטיל בחנו 4 סוגים שונים מבחינת חזוקם. דגמו 5 חתיכות بد מכל סוג ובדקו את חזוק הקריעת של כל סוג بد.
- מהו המשנה תלוי במחקר?
 - כמה משתנים בלתי תלויים יש במחקר? מה הם?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?
- 2)** במחקר בתחום הפסיכולוגיה נדגו אנשים הסובלים מחרדות מסווגים שונים. כל מטופל סוג כסובל מאחד מסוגי החרדות הבאים: חרדה חברתית, חרדה כללית או אוגרפוביה. במחקר השתתפו 6 מטופלים מכל סוג חרדה שצוי. המטופלים במחקר חולקו כך שכל מטופל היה צריך לעבור במשך שנה אחד מהטיפולים הבאים: טיפול קוגניטיבי התנהגותי (CBT), טיפול קבוצתי או טיפול דיאלקטי התנהגותי (DBT). בכל סוג טיפול השתתפו 2 מטופלים מכל סוג חרדה. בסוף השנה נבדקו כל המטופלים וקיבלו ציון כמותי על השיפור במצבם הנפשי (משנה כמותי). מטרת המחקר הייתה לבדוק האם סוג חרדה, סוג הטיפול והשילוב ביניהם משפיעים על המצב הנפשי של המטופלים.
- מהו גודל המדגם?
 - מהו המשנה תלוי במחקר הזה ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
 - כמה קטגוריות יש לכל משתנה בלתי תלוי?
 - כמה קבוצות שונות יש במרקחן מחקרי?
 - מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במרקחן מחקרי זה?

3) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שמננו עשויי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקット נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזו נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקット ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

		סוג בקבוק	
		גובה המדף	
		זכוכית	פלסטיק
59	23		
63	32		
88	47		
90	55		
51	40		
56	48		

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
- ב. מהו מספר הרמות של כל גורם מחקרי?
- ג. מה יהיו השערות המחקר אם יתבצע ניתוח שונות דו-כיווני?
- ד. מהו ערכו של m ומהו ערכו של α ?

4) יצורן של נוזל כביסה מעוניין לבחון שני נזולי ניקוי מבחינת יעלותם בהסרת כתמים בשלוש רמות טמפרטורה. בכל אחד מששת הציגופים של סוג נוזל וטמפרטורה נבחנה יכולת הסרת הכתמים מבדים דומים, וניתן ציון בין 0 ל-15 (הציון הטוב ביותר).

מספר סידורי	סוג הנוזל	טמפרטורה במעלה צלזiosa	ציון הסרת כתמים
1	C	30	4
2	C	30	5
3	C	30	4
4	C	30	6
5	C	40	7
6	C	40	8
7	C	40	9
8	C	40	10
9	C	60	11
10	C	60	12
11	w	30	9
12	w	30	14
13	w	30	15
14	w	30	16
15	w	40	17
16	w	40	18
17	w	40	19
18	w	40	20
19	w	60	21
20	w	60	22
21	w	60	23
22	w	60	13

- א. כמה משתנים יש במחקר?
- ב. לגבי כל משתנה קבוע האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ג. כמה רמות יש לכל גורם?
- ד. אם נבצע ניתוח שונות דו-ציוני, מה יהיו השערות המחקר?
- ה. רצוו את נתוני המחקר בטבלה שבה בשורות גורם אחד, בעמודות גורם שני ובתאים התוצאות שהתקבלו למשתנה התלוי.
- 5)** קבועו לגבי כל אחד מה הבאים האם הוא משתנה קטגוריאלי:
- מספר הניטוחים שעבר אדם בחיים.
 - אחוז האבטלה בישראל בחודש זה.
 - סוג דם של חולה.
 - שונות הציוניים בבחינת הבגרות באנגלית במועד האחרון.
 - משקל חביבה בדואר בגרמיים.
 - היבשת שאירחה את משחקי המונדיאל.
- בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:**
- 6)** משרד החינוך רוצה לבדוק עד כמה שיטת הוראה (יש 3 שיטות הוראה מקובלות) ומגדר משפיעים על ציוני הבגרות בהיסטוריה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים למחקר זה?
- מבחן Z להשואת תוחלות.
 - ניתוח שונות חד-ציוני.
 - ניתוח שונות דו-ציוני.
 - מבחן T ל佗חת אחת.
- 7)** מחלקת שירות הלקוחות של חברת החשמל דוגמה עובדים כדי לבחון האם ככל שמספר שנות הותק של נותן השירות גדול יותר גדול גם מספר הלקוחות שבו הוא מטפל במהלך שמטה. מהו המבחן הסטטיסטי שיכל לבדוק זאת?
- מבחן Z להשואת תוחלות.
 - ניתוח שונות חד-ציוני.
 - ניתוח שונות דו-ציוני.
 - אף אחת מהאפשרויות שלעיל.

- 8)** האיחוד האירופי המשותף דגם 10 עובדים מתחום ההוראה בכל אחת מהמדינות הבאות: הולנד, צרפת, בלגיה, גרמניה ואוסטריה. לכל עובד בדקו את גובה המשכורת החודשית שלו ביورو. אם נרצה להשוות בין המדינות הללו מבחינת תוחלת השכר של עובדי ההוראה במדינה, מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים?
- מבחן Z להשואת תוחלות.
 - ניתוח שונות חד-כיווני.
 - ניתוח שונות דו-כיווני.
 - אף אחת מהאפשרויות שלעיל.
- 9)** בקו ייצור 2 סוגים של מכונות ו-3 רמות ותק של מפעיל המכונה (עד שנתיים במפעיל, בין שנתיים ל- חמש שנים במפעיל, יותר מחמש שנים במפעיל). מנהל הייצור רוצה לבדוק אם קיימת השפעה של סוג המכונה והוותק של המפעיל על מספר המוצרים הפוגומים שיוצאים מהמכונה. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?
- מבחן Z להשואת תוחלות.
 - ניתוח שונות חד-כיווני.
 - ניתוח שונות דו-כיווני.
 - ניתוח שונות תלת-כיווני.
- 10)** במחקר נאספו הנתונים הבאים על קבוצת נחקרים:
- כמה כוסות קפה הנחקר שותה ביום: לא שותה / 2-1 כוסות/ יותר מ-2 כוסות.
 - מין הנחקר: גבר/אישה.
 - דופק (מספר פעימות בדקה) שעתיים אחרי הקימה. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם מספר כוסות הקפה שאדם שותה ביום משפיע על הדופק אצל גברים אחרית מאשר אצל נשים. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?
- מבחן Z להשואת תוחלות.
 - ניתוח שונות חד-כיווני.
 - ניתוח שונות דו-כיווני.
 - ניתוח שונות תלת-כיווני.

- 11) במחקר יש משתנה כמותי אחד ושני גורמים שלכל אחד מהם שתי רמות.
אילו מהמשפטים הבאים אינם נכונים?
- אפשר מבחינה טכנית לבדוק כיצד כל גורם בנפרד משפיע על המשתנה תלוי באמצעות ניתוח שונות חד-כיווני שייערך לכל גורם בנפרד.
 - אפשר מבחינה טכנית להשוות בין התוצאות של כל רמה בגורם הראשון על ידי מבחן T להשוואת תוצאות.
 - אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות דו-כיווני במרחב מחקרי זה.
 - כיוון שבמחקר יש בסך הכל שלושה משתנים, אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות תלת-כיווני.

תשובות סופיות

- חיזוק הקריעה.
- ניתוח שונות חד גורמי.
- 18
- ב. המשתנה תלוי: ציון במצב הנפש. המשתנים הב"ת: סוג חרדה, סוג הטיפול.
ד. 9
ג. 3,3
ה. ניתוח שונות דו גורמי.
- 3,2
א. ניתוח שונות דו גורמי.
- $m=2, n=12$ ד. H_0 : אין אינטראקציה, H_1 : יש אינטראקציה.
א. 3
- ב. משתנים ב"ת: סוג הנזול, טמפרטורה. משתנה תלוי: ציון הסרת כתמים.
ג. 3,2
ד. H_0 : אין אינטראקציה בין הגורמים, H_1 : אחרת.
ה. עיין בסרטון הוידאו.
- א. כן.
ב. לא.
ד. לא.
ו. כן.
ה. תלוי.
ג.
- ד
- ב
- ג
- ג
- ד
- (11)

אפקטים פשוטים, עיקריים ו互動אקטיביים

רקע

בניתוח שונות דו-כיווני אנו דנים במשתנה כמותי תלוי יחיד ובשני משתנים בלתי תלויים (גורמיים) המוחולקים כל אחד למספר רמות. מטרת המחקר היא לבדוק שלוש השערות שונות:

H_0 אין השפעה על המשתנה תלוי: a

אחרת: H_1

H_0 אין השפעה על המשתנה תלוי: b

אחרת: H_1

H_0 אין אינטראקטיביות בין שני הגורמיים:

אחרת: H_1

נרצה להבין מה בדיקת כל השערה בודקת לגבי האוכלוסייה הנחקרת.

אפקט עיקרי: אם יש שתי קטגוריות (רמות) לפחות של גורם מסוים שהתחולות שלهن שוונות, נאמר שלגורם זה יש השפעה על המשתנה תלוי. השפעה זאת נקראת "אפקט עיקרי". למשל, אם יימצא לפחות שתי תרופות נוגדות דיכאון שוונות שambilאות לתוחולות שוונות במצב הנפשי, נגיד שלסוג התרופה יש השפעה על המצב הנפשי, ככלומר יש אפקט עיקרי. כמוות האפקטים העיקריים שאפשר למצואו היא ככמויות הגורמים במחקר.

אפקט אינטראקטיבי: מצב שבו גורם אחד משפיע על המשתנה תלוי באופן שונה בקטגוריות שוונות של הגורם השני. למשל, תרופה נוגדת דיכאון אחת מביאה את הגברים למצב רוח טוב יותר מאשר את הנשים לעומת תרופה אחרת שambilאה דווקא את הנשים למצב רוח טוב יותר מאשר את הגברים. אפקט האינטראקטיביות הוא יחיד, ככלומר נאמר אם יש או אין אינטראקטיביות. כמו כן הינו אפקט סימטרי: אם קיימת אינטראקטיביות בין מגדר לסוג התרופה, יש גם אינטראקטיביות בין סוג התרופה למגדר.

אפקט פשוט: אפקט פשוט מתיחס לשפעת גורם אחד על המשתנה תלוי בתוך קטגוריה מסוימת של הגורם השני. למשל, נרצה לבדוק רק בקטגוריה של הגברים האם קיימים הבדלים בין התרופות נוגדות הדיכאון. אם נמצא הבדלים כאלה נאמר שיש

אפקט פשוט של סוג התרופה בקרב אוכלוסיית הגברים. כמוות האפקטים פשוטים שאפשר למצואו היא סכום מספר הקטגוריות (רמות) של כל גורם. למשל, אם יש שלושה סוגי תרופות ושתי אפשרויות למגדר, בסך הכל נוכל לבדוק 5 אפקטים פשוטים.

דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאיטות על אנשים בעלי משקל עודף. בעבר שלושה חודשים בדקו כמה קילוגרים הפחתת כל מטופל ממשקלו באותו התקופה. נניח שאנו יודעים את תוחלת הפחתת המשקל של כל דיאטה בחלוקת למגדרים.

נתאר כמה מצבים אפשריים לגבי האוכלוסייה הנחקרת וננתח כל מצב מבחינה אחת של כל גורם על תוחלת המשנה התלויה ו מבחינת אפקט האינטראקציה. שימושו לבשהמצבים שנטאר להן מתוייחסים לתוחלות האמיתיות. בניתוח שונות אין לנו נתונים אמת, אלא רק נתונים מודגמים, ונרצה לבדוק האם האפקטים שהתקבלו במדגים הם מובהקים, כנדרש בכל תהליך של הסקה סטטיסטית.

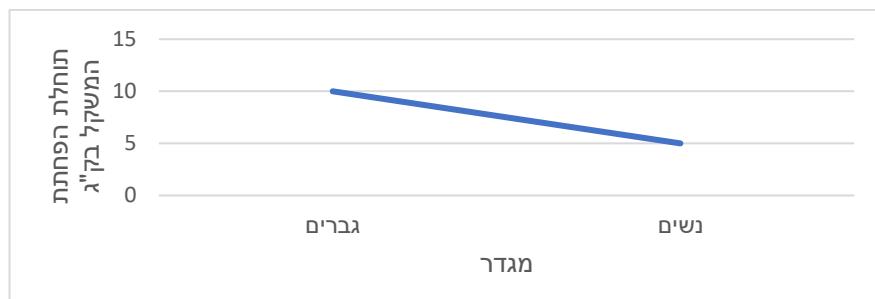
אם התוצאות שלנו יהיו ממוצעי מודגמים ולא תוחלות, נוכל לבדוק אם קיימים אפקטים במדגם, אך אין זה אומר שקיימים אפקטים באוכלוסייה, ככלומר לא נוכל לדעת אם האפקטים במדגם הם מובהקים. כדי לבדוק אם האפקטים הם מובהקים נוצרן לשות את מבחן ניתוח השונות.

מצב א:

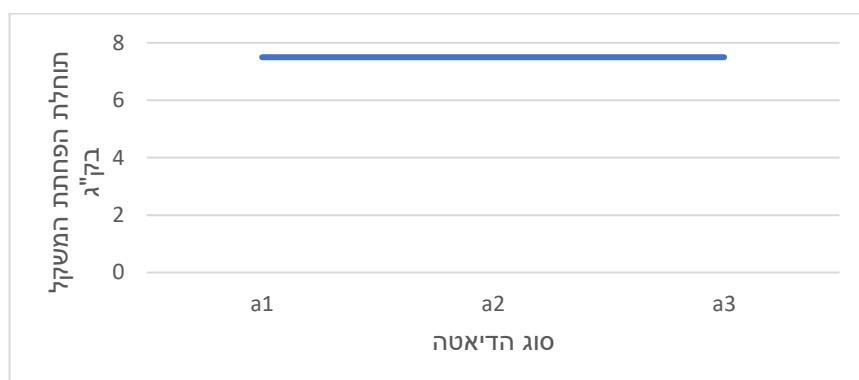
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה :

נשים	גברים	
5	10	a_1
5	10	a_2
5	10	a_3

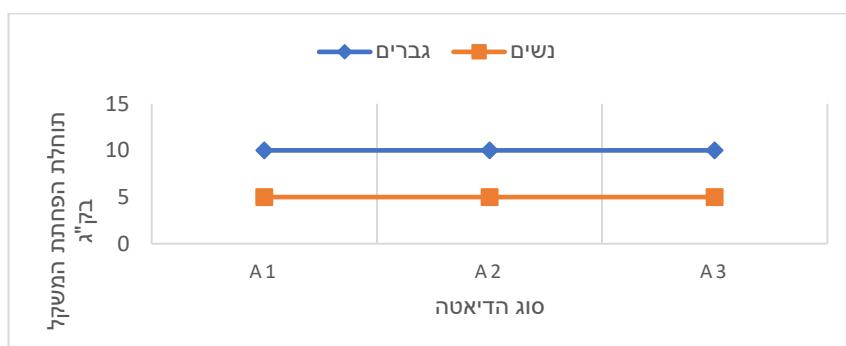
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקה אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים

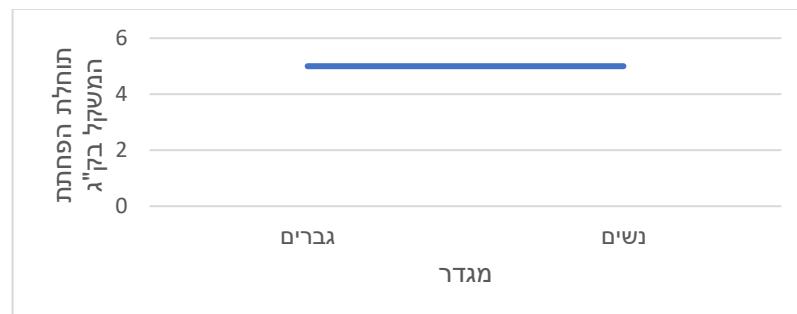
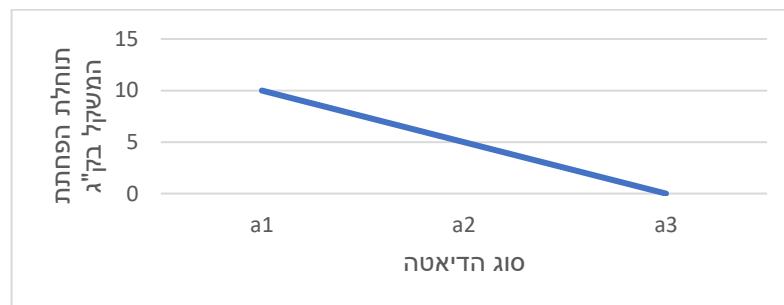
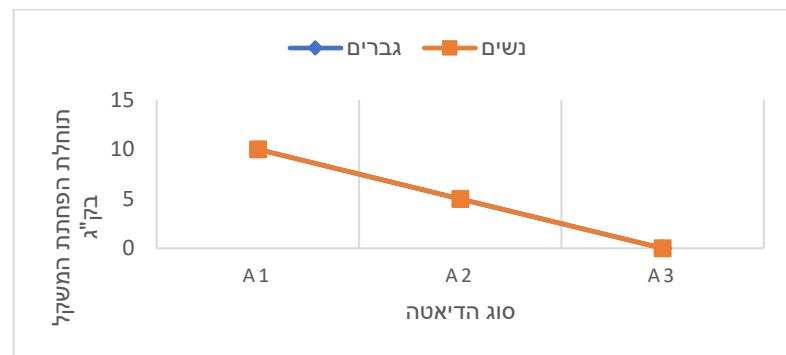


ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לשוג הדיאטה אין אפקט, אין אפקט אינטראקציה.
הערה: אם הקווים הנוצרים בגרף האפקטים פשוטים מקבילים או מתלכדים, אנו אומרים שאין אפקט אינטראקציה.

מצב ב

הטבלה הבאה מטארת את תוחלת הփחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

גברים	נשים	
10	10	a_1
5	5	a_2
0	0	a_3

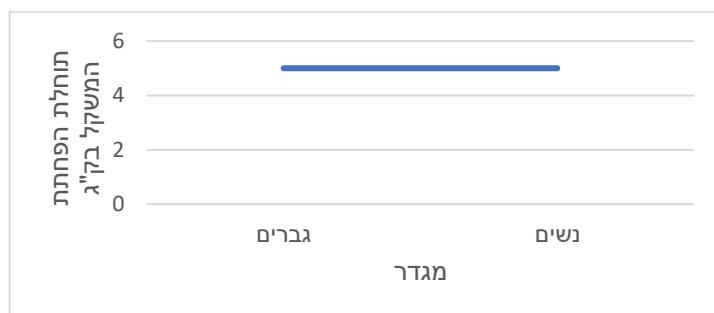
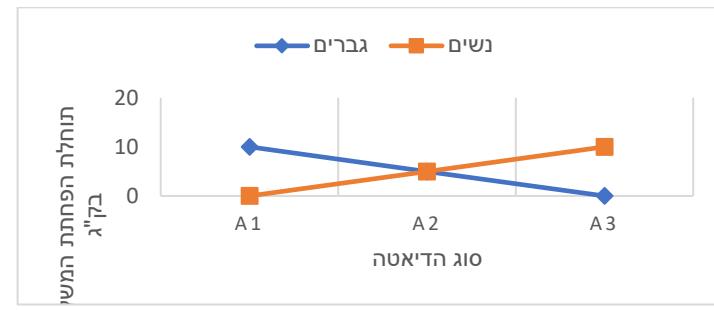
תיאור גרפי לבדיקה אפקט מגדרתיאור גרפי לבדיקה אפקט לסוג הדיאטהגרף אפקטים פשוטים

ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לשוג הדיאטה יש אפקט, אין אפקט אינטראקטיבי.

מצב ג

הטבלה הבאה מטארת את תוחלת הփחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

גברים	נשים	
0	10	a_1
5	5	a_2
10	0	a_3

תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדרתיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטהגרף אפקטים פשוטים

ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לשוג הדיאטה אין אפקט, יש אפקט אינטראקטיבי.

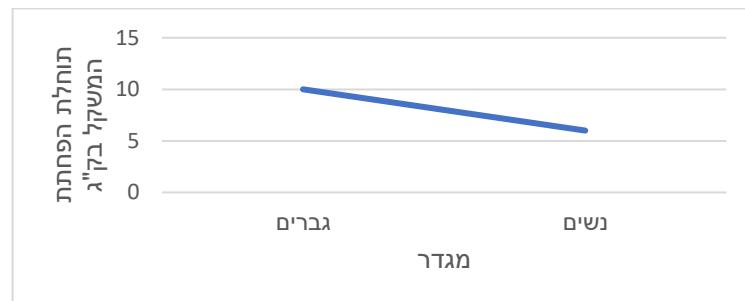
איןטראקציה דיסאורדינלית (נקראת גם "איןטראקציה מהותית") : אפשר לזהות מצב של איןטראקציה כזו באמצעות גוף של אפקטים פשוטים, כאשר נוצרים קווים נחתכים אחד מהם עולה והאחר יורם. המשמעות היא שגורם אחד משפיע על המשתנה התלוי ברמה מסוימת של הגורם השני באופן הפוך משווה על המשתנה התלוי ברמה אחרת של הגורם השני. במצב זה אין להתייחס רק לאפקטים פשוטים.

מצב ה

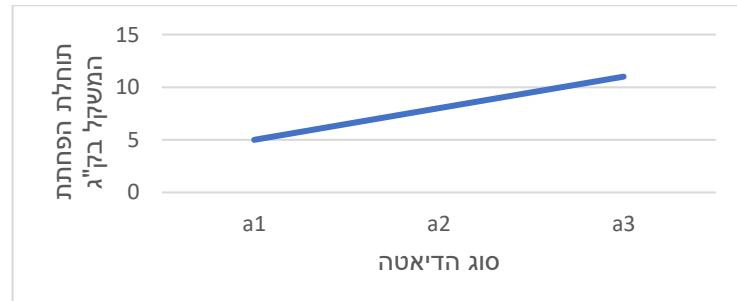
הטבלה הבאה מတרת את תוחלת הփחתה המשקל בק"ג לכל קבוצה :

גברים	נשים	
5	5	a_1
6	10	a_2
7	15	a_3

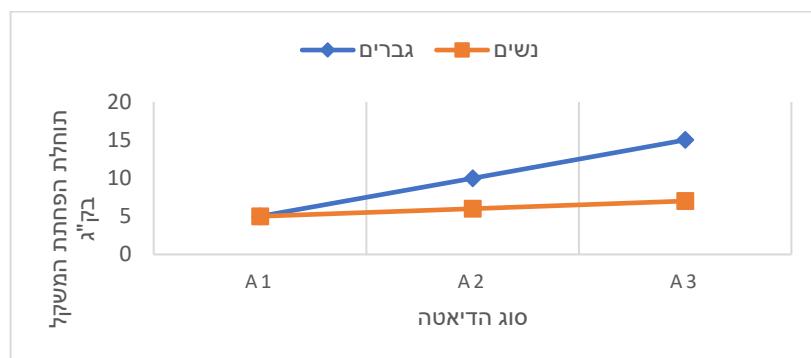
תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



גרף אפקטים פשוטים



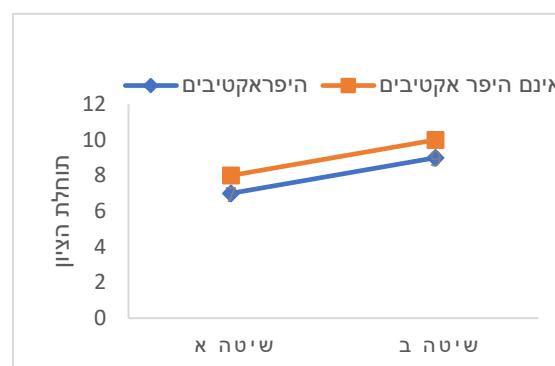
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, יש אפקט אינטראקטיבי.

אינטראקטיבית אורדיינלית (נקראת גם "אינטראקטיבית לא מהותית") : אפשר לזהות מצב של אינטראקטיבית כזו כאשר בגרף האפקטים פשוטים נוצרים נחטכים עם אותו הכיוון (כולם עולים או כולם יורדים אבל לא באותו השיפוע). המשמעות היא שבמעבר של גורם אחד מרמה אחת לרמה אחרת שלו הוא משפיע על המשתנה תלוי באותו אופן בכל רמה של המשתנה האחר אבל עם גודל אפקט שונה.

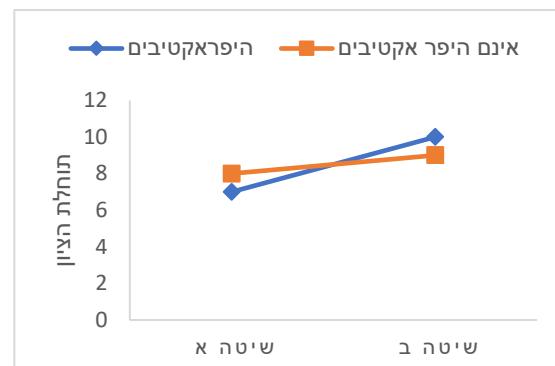
שאלות

1) בוגני החובה יש שתי שיטות הוראה. שיטות אלו נסעו על ילדים היפראקטיביים וילדים שאינם היפראקטיביים. בתרשיימים הבאים מוצגים גרפים שמתארים את תוחלת הציון ב מבחן אוצר המילים שנייתם לילדים בסוף השנה. בכל אחד מהמקרים יש לקבוע האם קיימת אינטראקציה בין שני הגורמים. אם קיימת אינטראקציה, יש לקבוע האם היא אינטראקציה אורדינרית או דיסאורדינרית.

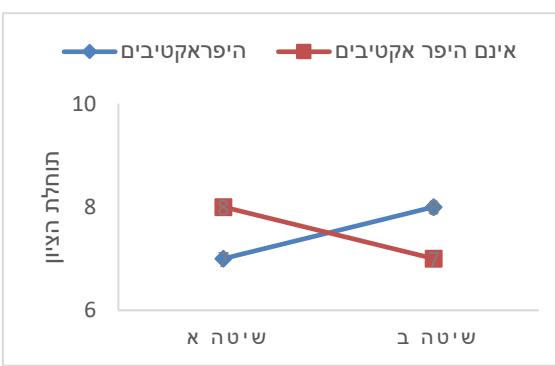
א.

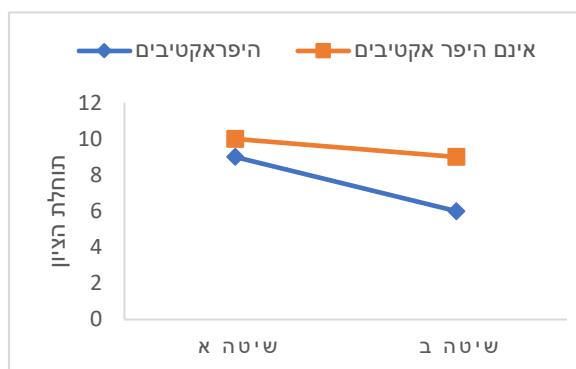
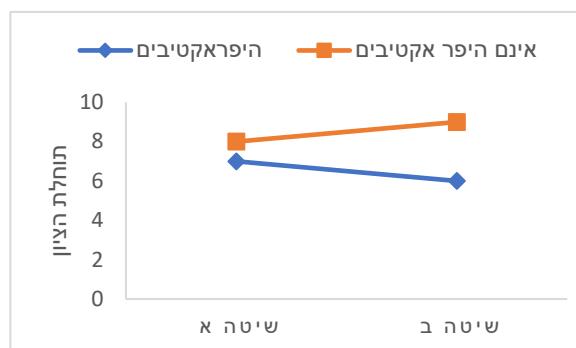


ב.



ג.





2) משרד האוצר פרסם נתונים על המחיר הממוצע של דירות גן ודירות גג של 4 חדרים ב-3 ערים בארץ. מחיר הדירות נמדד ב מיליון שקלים.
להלן התוצאות שהתקבלו:

	דירות גן	דירות גג
הרצליה	4	3
אשדוד	2	1
חולון	3	2

- א. מהו המשתנה התלוי ומה הם המשתנים הבתוי תלוים?
- ב. האם קיים אפקט לעיר? הייערו בגרף מותאים.
- ג. האם קיים אפקט לסוג הדירה? הייערו בגרף מותאים.
- ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה? הייערו בגרף מותאים.
- ה. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גן?
- ו. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גג?
- ז. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בהרצליה?
- ח. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה באשדוד?
- ט. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בחולון?

3) משרד החינוך פרסם נתונים על תוחלת הציונים בבחינות הבגרות באנגלית לפי עיר וסוג בית הספר (יעוני או מקצועני). להלן התוצאות שהתקבלו:

מקצועני	יעוני	
70	85	רעננה
75	75	תל אביב
85	70	פתח תקווה

- א. תארו את הנתונים באמצעות גרפ אפקטים פשוטים.
- ב. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?
- ג. באילו ערים קיים אפקט פשוט לסוג בית הספר?

4) משרד התחבורה פרסם נתונים על תוחלת מספר עבירות התנועה לבעלי רישיון נהיגה לפי עיר ולפי מגדר. להלן התוצאות שהתקבלו:

רמות גן	אשקלון	חיפה	אישה	גבר
1	2	2	1	
1	2	2	1	
1	2	2	1	

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
- ב. האם קיים אפקט עיקרי למגדר?
- ג. האם יש אפקט פשוט לעיר אצל הגברים?
- ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה?

5) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בעיר שונות בארץ בחורף ובאביב. להלן התוצאות שהתקבלו:

בארכ שבע	ירושלים	חיפה	chorf	קייז
15	10	20	20	
15	10	20	20	
15	10	20	20	

- א. האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
- ב. האם קיים אפקט עיקרי לעונה?
- ג. האם קיימת עיר שבה יש אפקט פשוט לעונה?
- ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?

- 6) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חוֹרֶף	קִיץ	
10	10	רמת גן
10	10	גבועתיים
10	10	בת ים

האם קיימים אפקט עיקרי לגורמים כלשהו? האם קיימת אינטראקציה?

בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:

- 7) במחקר נבדקו 5 אנשים מכל אחת מ-4 הקבוצות הבאות: 1. מתעמלים באופן קבוע וشומרים על תזונה בריאה; 2. מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה; 3. לא מתעמלים באופן קבוע וশומרים על תזונה בריאה; 4. לא מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה. להלן טבלה המסכםת את ממוצע הטריגליקידים בدم (מ"ג לדציליטר) שנמצא בכל מדגם:

לא תזונה בריאה	תזונה בריאה	מתעמלים
100	90	
160	100	לא מתעמלים

- א. קיימים אפקט עיקרי מובhawk לגורמים ההתערבות.
 ב. קיימים אפקט עיקרי מובhawk לגורם התזונה.
 ג. קיימים אפקט אינטראקציה מובhawk בין שני הגורמים במחקר.
 ד. אי אפשר לדעת אם קיימים אפקט מובhawk כלשהו על סמך תוצאות המדגם בלבד ללא ביצוע מבחון מתאים ולא קביעת רמת המובhawkות של המחקר.

- 8) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריואיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. מסקנת המחקר הייתה שאצל גברים נמצאו הבדלים מובהקים בין הטיפולים השונים מבחינה תוחלת זמן התגובה. לאיזה סוג אפקט המסקנה מתיחסת?
 א. אפקט אינטראקציה.
 ב. אפקט עיקרי של גורם המין.
 ג. אפקט עיקרי של גורם סוג הטיפול.
 ד. אפקט פשוט.

9) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריואזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. במקרים היה ממוצע זמן התגובה של הגברים שונה מממוצע זמן התגובה של הנשים.

א. אפשר להגיד שבמקרים קיימים אפקט עיקרי, אך אי אפשר לדעת אם האפקט העיקרי מובהק.

ב. אפשר להגיד שבמקרים קיימת אינטראקציה, אך אי אפשר לדעת אם האינטראקציה מובהקת.

ג. אפשר להגיד שקיימים אפקט עיקרי מובהק.

ד. אפשר להגיד שקיימת אינטראקציה מובהקת.

10) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריואזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. אחת המשקנות של המחקר הייתה מהטיפולים השונים משפיעים במידה מסוימת יותר על זמן התגובה של הגברים מאשר על זה של הנשים, אם כי באותו האופן.

א. המשקנה היא שאין אינטראקציה בין הגורמים במחקר.

ב. המשקנה היא שיש אינטראקציה אורדינלית בין הגורמים במחקר.

ג. המשקנה היא שיש אינטראקציה דיסאורדינלית בין הגורמים במחקר.

ד. המשקנה היא שיש אפקט עיקרי של המגדר.

תשובות סופיות

1) א. אין אינטראקציה.
ב. אינטראקציה אורדינלית.
ד. אינטראקציה דיסאורדינלית.

ג. אינטראקציה דיסאורדינלית.
ה. אינטראקציה אורדינלית.

2) א. המשתנים הב'ית: העיר, סוג הדירה. המשתנה תלוי: מחיר.
ב. קיימים.
ג. קיימים.
ה. לא קיימים.
ו. קיימים.
ח. קיימים.

3) א. עיין בסרטון הוידאו.
ב. אינטראקציה דיסאורדינלית.
ג. רעננה ופתח תקווה.

4) א. לא.
ג. לא.

5) א. כן.
ג. לא.

6) לא, לא.

7) ז

8) ז

9) א

10) ב

תהליכי ניתוח שונות דו-כיווני – הлик מבחן

רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקרים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאל", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמערך מסווג $B \times A$, כאשר A מייצג את מספר הרמות של גורם a , ו- B מייצג את מספר הרמות של גורם b . במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך $C \times B \times A$, וכך הלאה.

דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. בעבר שלושה חדשים מתחילה הדיאטה נשקלו כל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחתה בעבר שלושה חדשים.

סוג הדיאטה		b_1	b_2	b_3	סה"כ
מין	מיון				
נשים	8	6	4		
	4	8	6		
	0	10	8		54
גברים	6	0	9		
	10	2	12		
	14	4	15		72
סה"כ		42	30	54	126

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקה ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?

בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהילה של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות.
הנחות הן:

1. $A \times B$ הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.
2. בכל $B \times A$ האוכלוסיות המשתנה תלוי מתפלג נורמלית.
3. בכל $B \times A$ האוכלוסיות אותה שונות, σ^2 .

הערה: ניתוח שונות הוא מבחן רוביטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות. התייאוריה הסטטיסטיית שפותחה התבسطה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבור טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטי.

בdziמץ לדוגמה

רשמו את כל ההנחות הדרושים לביצוע ניתוח השונות.

הליך המבחן

בנייה טבלת ממוצעים

בנייה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא :

\bar{X}_i – ממוצע המדגם ברמה i של גורם a

$\bar{X}_{.j}$ – ממוצע המדגם ברמה j של גורם b

\bar{X}_{ij} – ממוצע המדגם בתא ij

בשימוש לדוגמה

- מלאו את טבלת ממוצעים הבאה :

מין	סוג הדיאטה	b_1	b_2	b_3	$\bar{X}_{i.}$
נשים					
גברים					
$\bar{X}_{.j}$					

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

בנית טבלת ריבועי הפרשי ממוצעים

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא z_{ij} נחשב: $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2$

בஹשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הפרשי ממוצעים:

סוג הדיאטה מין	b_1	b_2	b_3	$(\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2$
נשים				
גברים				
$(\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$				

חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים:

הסימן SS הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

$$SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^A (\bar{X}_{i \cdot} - \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם } a:$$

$$SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם } b:$$

$$SS_{ab} = m \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i \cdot} - \bar{X}_{\cdot j} + \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה:}$$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפויות בתא ממוצע בתא):

$$SS_W = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפויות ממוצע הכללי:

$$SS_T = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

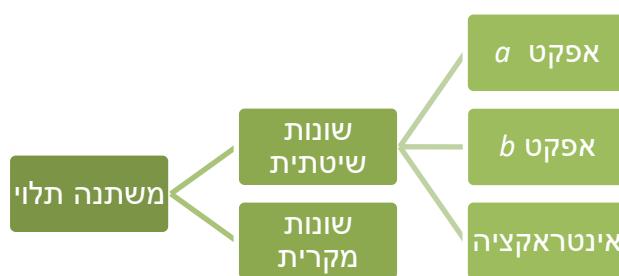
הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא:

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין צורך ליחס את כל חמישת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתיות: $SS_a + SS_b + SS_{ab}$. השונות השיטתית היא שוניתת היא שנות שמקורה בגורםים עצמים.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקראית: SS_W . השונות המקראית היא שונות שנתקנית גם "שונות טבעיות" או "שונות בתנך הקבוצות". זהו שונות בין התצפויות שאינה נובעת מהגורםים הנחקרים. האות W מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות **בתוך** התאים.



בשימוש לדוגמה

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים:

$$SS_a =$$

$$SS_b =$$

$$SS_{ab} =$$

$$SS_T =$$

$$SS_W =$$

חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב ייעשה על ידי חלוקת-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשולש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנΚראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטיה Mean Square	F
a	$A - 1$	SS_a	MS_a	$F_a = MS_a / MS_W$
b	$B - 1$	SS_b	MS_b	$F_b = MS_b / MS_W$
ab	$(A - 1)(B - 1)$	SS_{ab}	MS_{ab}	$F_{ab} = MS_{ab} / MS_W$
Within	$AB(m - 1)$	SS_W	MS_W	
Total	$n - I = ABm - 1$	SS_T		

בהמשך לדוגמה : מלאו את טבלת ניתוח השונות

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	F
a				
b				
ab				
Within				
Total				

כלי ההכרעה לבדיקת השערות

הסטטיסטי F_a מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם a לבין השונות המקראית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם a יש השפעה גדולה יותר על המשטנה התלוי. F_a קיבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקראית תקטן. הסטטיסטי מתפלג הtcpלגות F, ואזרור הדחיה שלו יהיה הצד ימין.

- כל ה嚮רעה לבדיקת המובקות של גורם a :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_a > F_{1-\alpha} (df_a, df_w)$$

לפי אותו עיקנון שאר כל ה嚮רעה יהיו :

- כל ה嚮רעה לבדיקת המובקות של גורם b :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_b > F_{1-\alpha} (df_b, df_w)$$

• כל ה嚮רעה לבדיקת המובקות של האינטראקציה :

דחה את השערת H_0 ברמת מובהקות של α אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha} (df_{ab}, df_w)$$

בשימוש לדוגמה

רשמו את כל כללי ההחלטה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

הערות

1. אם מקרים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיון שהוא נובע מהאינטרاكציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגים טיפוליים, לא יוכל לדעת לפיה איזה טיפול שונה מאופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

בשימוש לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?

שאלות

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שמננו עשויי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלילים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקット נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזו נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקット ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

		סוג בקבוק	
		זכוכית	גובה המדף
פלסטיק	פלסטיק	59	23
	זכוכית	63	32
		נמוך	
זכוכית	פלסטיק	88	47
	זכוכית	90	55
		בינוני	
זכוכית	זכוכית	51	40
	זכוכית	56	48
		גבוה	

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על נתונים מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחהות הדרשיות לביצוע המבחן?

2) במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקיות אדמה: 4 חלקיות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יבול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חלקה	מקום החלקה	שיטת השקיה	יבול העגבניות	מספר
1	נגב	ממטרות	12	
2	נגב	ממטרות	10	
3	נגב	טפטפות	15	
4	נגב	טפטפות	17	
5	עמק יזרעאל	ממטרות	12	
6	עמק יזרעאל	ממטרות	14	
7	עמק יזרעאל	טפטפות	17	
8	עמק יזרעאל	טפטפות	19	

- א. רשמו את כל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמבחן יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגים? האם האפקטים מובחקים?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובחך והאם האינטראקציה היא מובחכת. מה הן ההנחות הדרשיות?

- 3) חברת לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשה לצבע לשיער שאינו>Dורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוויטה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הcisio וזואת על שלושה סוגים שליער: בהיר, כהה ושיבת. ציון רמת הcisio הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבועה של סוג צבע וסוג שיער נציגו 4 צביעות שונות על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הcisio. להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

הקבוצה	ממוצע	שונות
צבע רגיל על שיער בהיר	62	40
צבע רגיל על שיער כהה	51	44
צבע רגיל על שיער שיבת	45	42
צבע חדש על שיער בהיר	60	46
צבע חדש על שיער כהה	54	40
צבע חדש על שיער שיבת	44	42

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

- 4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם a יש 4 רמות ולגורם b יש 3 רמות. נערך 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונה דו-גורמי שבוצע:

השונות	מקור	df	SS	MS	F
	a	?	318	?	?
	b	?	?	?	?
אינטראקטיה		?	190	?	?
	W	?	156	?	
	T	?	674		

א. מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.

ב. בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:

.i. האם האינטראקטיה מובהקת?

.ii. האם גורם a משפיע על המשתנה התלו依 הנחקר?

.iii. האם גורם b יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

5) במחקר בדקו האם אرض מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שונות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלהניתוח שונות:

מקור השוני	df	SS	MS	F
ארץ מוצא	4	34		
מגדר			2	
אינטראקציה		18	4.5	
W	10	12		
T				

- א. כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?
- ב. מהו גודל המדגם הכלול במחקר זה?
- ג. חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור אرض המוצא, המגדר
והאינטראקציה.
- ד. מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

6) בטבלה הבאה מסוכמים המוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי:

	b_1	b_2	b_3
a_1	8	14	11
a_2	6	13	16

מספר התצפויות בכל תא הוא 5.

הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה:

מקור השונות	df	SS	MS	F
a				
b		281.7		
ab		71.7		
W		190.1		
T				

- א. מלאו את טבלת ניתוח השונות.
- ב. הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.
- ג. שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

תשובות סופיות

- 1) עיין בסרטון היהודי.
- 2) א. משתנים בית: מקום החקלה, שיטת השקייה. משתנה תלוי: יבול בטורנה לדונם.
ב. עיין בסרטון היהודי.
ג. עיין בסרטון היהודי.
- 3) עיין בסרטון היהודי.
- 4) א. עיין בסרטון היהודי.
ב. נ. כנ. iii. לא.
ג. עיין בסרטון היהודי.
- 5) א. 4
ב. 20
ד. עיין בסרטון היהודי.
ג. עיין בסרטון היהודי.
- 6) א. עיין בסרטון היהודי.
ב. עיין בסרטון היהודי.
ג. עיין בסרטון היהודי.

סטטיסטיקה

פרק 23 - מקדם המתאים (מחד קשור) הלינארי ומובהקוותו

תוכן העניינים

246	1. מקדם המתאים הלינארי (פירסון)
257	2. חישוב מקדם המתאים הלינארי (פירסון)
262	3. בדיקת השערות על מקדם המתאים הלינארי
266	4. ניתוח פלטימס על מקדם המתאים הלינארי

막דם המתאים (מדד קשר) הליינארי וモבהקוֹתוֹ

מדד הקשר הליינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסווג קשר ליינארי (קו ישר) בין שני משתנים. שני המשתנים שאנו בודקים לגבייהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים. מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רוחחים או מנה. בדרך כלל המשתנה המוצג כ- Y הוא המשתנה תלוי והמשתנה המוצג כ- X הוא המשתנה הבלתי תלוי. תיאור גרפי לנוטונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- X ושיעור ה- Y שלו. דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה (פתרו בהקלטה):

בבנייה 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגורות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חדרים בדירה	מספר הנפשות בדירה
4	4
5	4

מספר חדרים בדירה	מספר הנפשות בדירה
3	3
3	2
2	2
2	1
3	0
3	2
2	2
4	4

1) כמה תציפות ישנן בדוגמה?

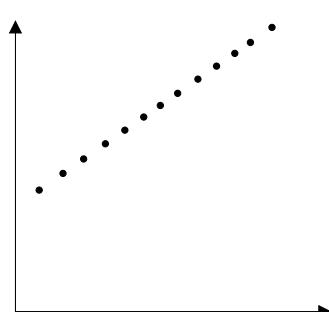
2) כמה משתנים ישנים בדוגמה, מי הם?

3) שרטטו לנוטונים דיאגרמת פיזור.

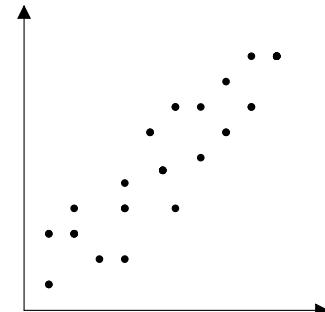
4) מי המשתנה תלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

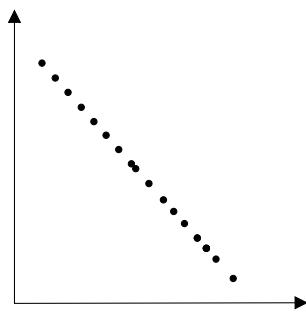
קשר לנארוי חיובי מלא



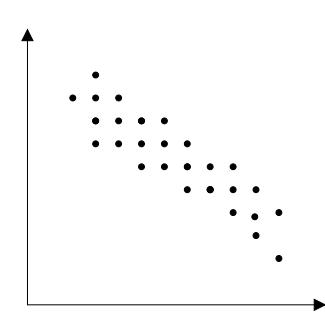
קשר לנארוי חיובי חלק



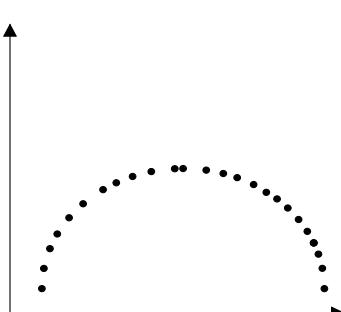
קשר לנארוי שלילי מלא



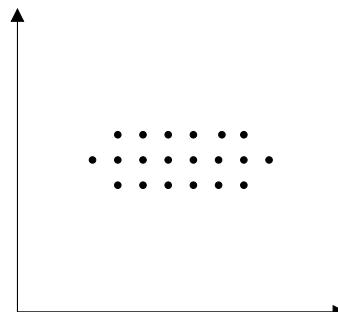
קשר לנארוי שלילי חלק



אין קשר לנארוי



אין קשר



משמעות מקדם המתאים:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לנארוי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאים הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאים של פירסון. מקדם מתאים זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1

0

1

מقدم מותאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שנייתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר: $y = ax + b$.

מתאים חיובי מלא (מقدم מותאם 1):

קיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a יהיה חיובי ואילו מותאם שלילי (מقدم מותאם-1) מלא אומר שקיים קשר לנארי מלא בו השיפוע a שלילי.

מתאים חיובי חלק:

כל משתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מותאם שלילי חלקי אומר שככל המשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט. ככל שמדובר המתאים הקרוב לאפס עצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לsicום, מقدم המתאים בודק את עצמת הקשר הלינארי, ואת כיוון הקשר.

מقدم המתאים הלינארי אינו מושפע מייחדות המדידה. כל שינוי ביחסות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מقدم המתאים.

מדד הקשר הלינארי באוכולוסייה, שנראה גם מقدم המתאים של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכולוסייה מסומן ב: r - פרמטר המאפיין את עצמת הקשר הלינארי באוכולוסייה וכיונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

- מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר r .

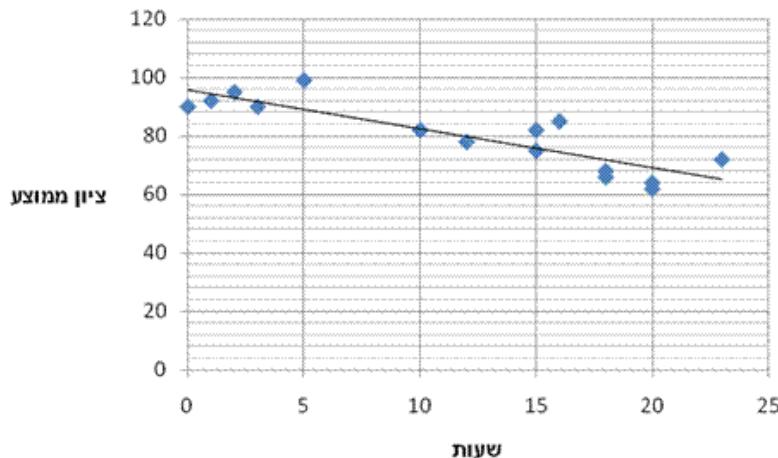
קיומו של מותאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבות בבחירה. למשל, אם נמצא מותאם חיובי בין כמות הסוכרזיות שאדם אוכל לבין משקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי,قولר אם נחליף את X ב- Y התוצאה תהיה זהה.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מועד המתאים של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור שרטטנו?
- אם היינו משנים את הشرط כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משנה על מדד הקשר של פירסון?

שאלות

1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור :



- א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?
- ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועית לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?

2) להלן טבלה המסכםת את מקדמי המתאים הליינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת :

מתמטיקה	לשון	ספורט	ספורט
?	-0.7	?	ספורט
0.6	?	?	לשון
?	?	-0.1	מתמטיקה

א. השלימו את מקדמי המתאים שמשמעותם בסימן שאלה בטבלה.

ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

3) במחקר נתקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לביון הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל :

שיעור תרגול	ציון סופי
90	20
90	25
95	30
60	15
90	30
85	20
50	10

- א. מיהו המשתנה התלו依 ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?
- ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנ נתונים.
- ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?
- ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאים של המדגם?

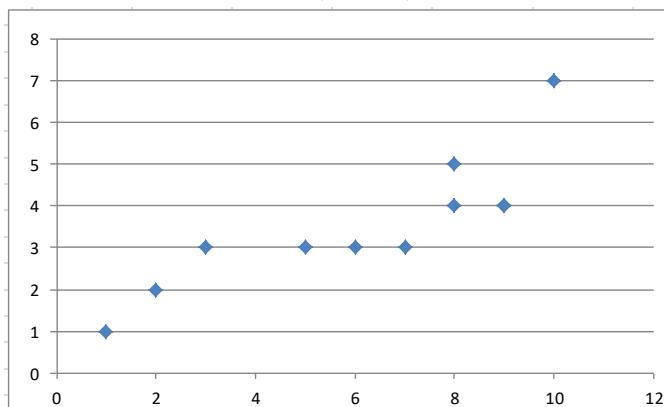
4) בتحقנה המטאורולוגית רצוי לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במערכות כלזיות לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאים שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:

בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה _____.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למערכות פרנהייט על מנת שיוכלו להשוות אותה לנ נתונים מארה"ב. נוסחת המעבר היא $F^0 = 32 + \frac{9}{5}C^0$. כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאים בין הטמפרטורה במערכות פרניאיט לכמות המשקעים במ"מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משתנים:



א. השלימו: ניתן לראות קשר הוא לינארי _____ (מלאו חלקי) כיון שהקשר הוא (חיובי ושלילי).

ב. השלימו: אם היינו מושפעים תצפית שערך ה- X שלה הוא 4 וערך ה- Y שלה הוא 7, מקדם המתאים של פירסון היה _____ (גדלו קטו לא משתנה).

שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):

6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדזה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאים שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאים השילי בדוגמם:

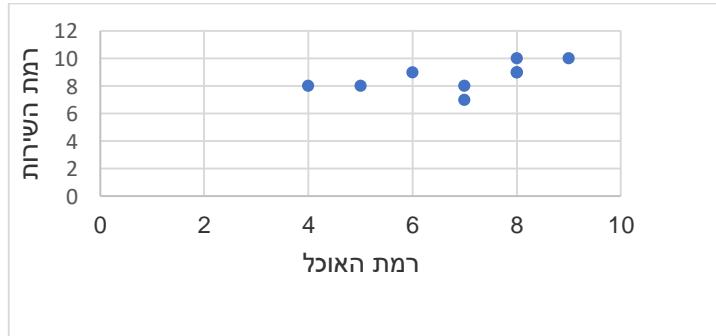
א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני ביום שנדגמו.

ב. בדוגמם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, בדוגמם זה, הוא שלילי.

ד. בדוגמם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

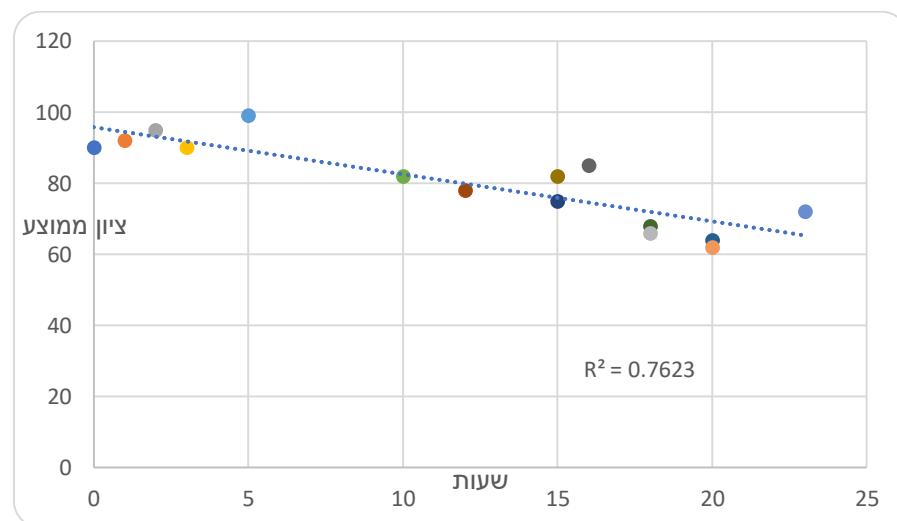
- 7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "fat لלחס" התבקוו הליקות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאים (r)?

- א. $r = -0.3$
- ב. $r = 0$
- ג. $r = 1.125$
- ד. $r = 0.593$

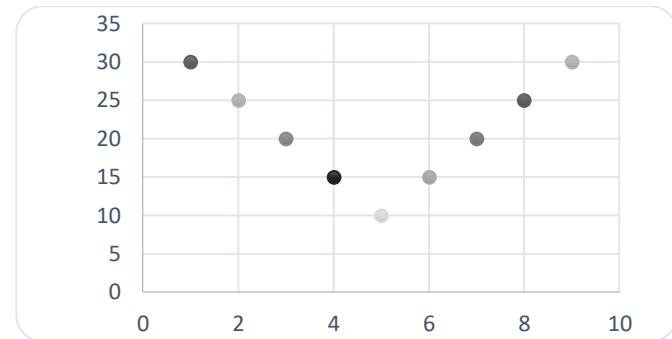
- 8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויוצר דיאגרמת פיזור.



מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

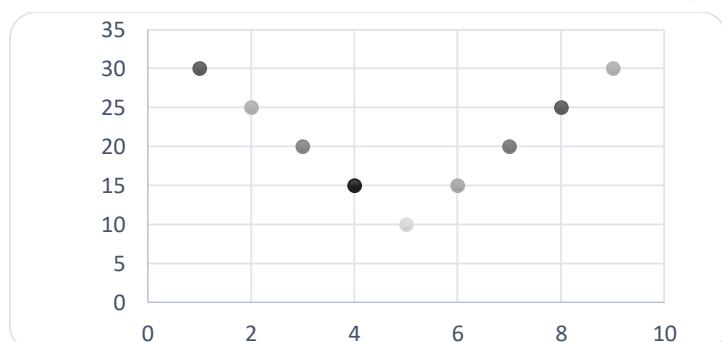
- א. ככל שմבלים יותר הציון נוטה לרדת.
- ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
- ג. ככל שմבלים פחות הציון נוטה לרדת.
- ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבליה פחות.

9) התרשימים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



- א. $1 = z$ היות ושני המשתנים יוצרים קווים ישרים.
- ב. $2 = z$ היות ויש שני קווים בעלי קשר מושלם.
- ג. $0 = z$ היות והקו יורד ולאחר מכן עולה באותו האופן.
- ד. $1 \pm 1 = z$ היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

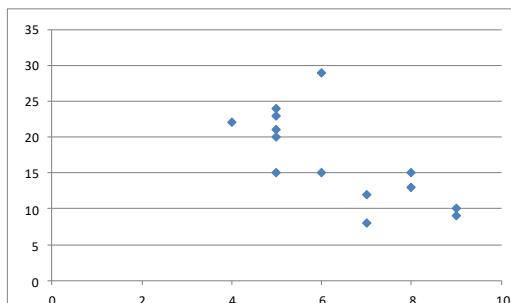
10) התרשימים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזה טענה נכונה?

- א. בתרשימים מוצג הקשר בין שני משתנים.
- ב. בתרשימים מוצג הקשר בין 9 משתנים.
- ג. בתרשימים מוצג הקשר בין 10 משתנים.
- ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשימים.

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים :



X - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)
ו- Y (משתנה תלוי).

במדגם התקבל $r^2 = 0.52$.

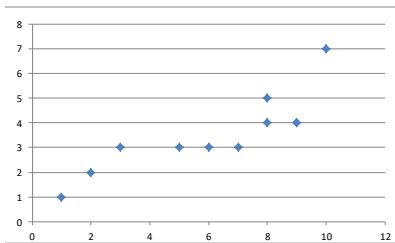
11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבחן הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של r ?

- א. -0.52
- ב. 0.72
- ג. -0.72
- ד. 0.52

12) אם מקדם המתאים בין שני משתנים הוא 1, אז :

- א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.
- ב. עברו כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.
- ג. הקשרlienاري הוא בעוצמה חזקה.
- ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור :
מה יהיה מקדם המתאים בין שני המשתנים ?



- א. 1
- ב. 0.85
- ג. 0.15
- ד. 0

14) בבדיקה קשר בין שני משתנים התקבל : $r = -1$.
א. קיימת נוסחהlienארית הקושרת בין כל התצפיות.
ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.
ג. ככל משתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.
ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.

15) לפי הפטגס "רחוק מהעיר, רחוק מהלב", יש קשר ____ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

- א. חיובי
- ב. שלילי
- ג. אפסי
- ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמייר הינו מבחן מיוון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכתה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמаксימלי הינו 250. בקורס הכנה לבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פلت שהתקבל:

	159
	170
	180
	185
	204
	224
	236
	212
	168
	189
	195
	163
	187
	206
	201
	223
	242
	203
	205
197.47 AVERAGE	
536.25 VARPA	

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודות הציונים שטראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציוון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאים בין שתי העמודות (תלמיד, מקדם המתאים בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

- א. -1
- ב. 1
- ג. -0.5
- ד. 0.5

17) מקדם המתאים בין שטחי דירה למחר שלחם חושב ונמצא 1.2. מה נובע לכך?

- א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.
- ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.
- ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחר שדייה.
- ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים וונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמה כו' את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאים בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

- א. 1
- ב. 0
- ג. -1
- ד. לא ניתן לדעת.

- 19)** נמצא מתאים חיובי בעוצמה גבוהה בין X – ציון בගירות בלשון ל Y – ציון בගירות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?
- ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.
 - קיימות נוסחה של קו ישר שקשורה בין ציון בගירות במתמטיקה לציון בගירות בלשון.
 - לא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שככל תלמיד שמציל יותר מטלמיד אחר בלשונו גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.
 - אף אחד מהטענות שהוצעו אינה בהכרח נכונה.
- 20)** עברו סדרה של תצפיות מדדו את X ואת Y . נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של Y ירד הערך של X בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מוקדם המתאים של פירסון יהיה בהכרח:
- 1
 - 1
 - 0
 - אף אחת מהתשובות.

תשובות סופיות

- ב. הקשר חלקי, כיוןו הקשר שלילי.
ב. ספורט ולשון.

- (1) א. שעות בילוי.
(2) א. להלן טבלה:

מתמטיקה	לשון	ספורט	ספורט
ספורט	0.1	-0.7	1
לשון	0.6	1	-0.7
מתמטיקה	1	0.6	-0.1

- ב. ראה גרפ' בפתרון וידאו.
ד. מקדם המתאים לא היה משתנה.
ב. לא ישפיע על מקדם המתאים.
ב. קטן.

- (3) א. ב'ית- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.
ג. קשר לינארי חיובי חלקי.

- (4) א. עלות.
(5) א. חלקי, חיובי.

(6) ד'. ד'.	(7) א'. א'.
(11) ג'. ג'.	(12) ב'. ב'.
(16) א'. א'.	(17) ד'. ד'.
(19) ד'. ד'.	(20) א'. א'.
(14) א'. א'.	(15) (10) ג'. ג'.

מדדי קשר – מדד הקשרlienاري (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאים) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המודיעיה קשר בין סולמות רוחניים ומנה. בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- Y הוא המשתנה המוסבר (התלווי).

דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנ마다 בسنوات לימוד – X מסביר את ההכנסה שלו Y . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להשיבר את השינויים שלו בהכנסה, וכך רמת ההכנסה זהו המסביר התלווי במשתנה המסביר אותו.

שלב ראשון: נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנוננת אינדיקטיבית ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

דוגמה:

מספר דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

בבנייה של 5 דירות בדקנו את הנתונים הבאים :

X - מספר חדרים בדירה. Y - מס' נפשות הגרות בדירה.

להלן התוצאות שהתקבלו :

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הDİAGRAM המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הDİAGRAMS המלאות בסרטון).

שלב שני: מחשבים את מקדם המתאים (מדד הקשר) שבזוק עד כמה קיים קשרlienاري בין שני המשתנים. המדד (נקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שנראה בשלב הראשון רק בעין.

המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).

מקדם מתאים זה מקבל ערכאים בין 1- ל-1.

מקדם מתאים 1- או 1 אומר שקיים קשרlienاري מוחלט ומלא בין המשתנים שניתנו לבטא על ידי הנוסחה : $y = bx + a$.

מתאים חיובי מלא (מקדם מתאים 1):

קיים קשר לנארוי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו מתאים שלילי מלא אומר שקיים קשר לנארוי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאים 1-).

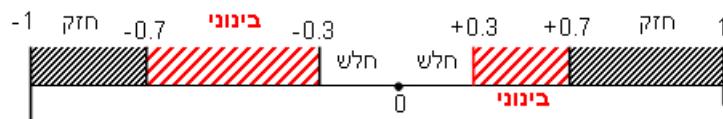
מתאים חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה ליניארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

מתאים שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה ליניארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאים קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלה יותר וככל שמקדם המתאים רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר :



מקדם המתאים יסומן באות r .

כדי לחשב את מקדם המתאים, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$COV(x, y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 : \text{שונות של המשתנה } X$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 : \text{שונות המשתנה } Y$$

$$\text{מקדם המתאים הלינאי: } r_{xy} = \frac{COV(x, y)}{S_x \cdot S_y}$$

שאלות

1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו ל מבחון. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	ציון
4	70
3	70
2	90
0	90
1	90
2	80

א. שרטטו דיאגרמת פיזור לנ נתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלטי תלוי ומיהו המשתנה התלויה?

ב. חשבו את ממד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתוישבת עם תשובה לסעיף א'?

ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאים היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהיחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

2) במחקר רפואי רצוי לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בدم החולים לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמוניים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

א. מה הממוצע של כל רמת ההורמו?

ב. מהו מקדם המתאים בין ההורמוניים? ומה המשמעות ההתואמת?

3) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ש. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ש. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את ממד הקשר הליינארי בין X ל- Y. מיהו המשתנה התלויה?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

4) נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי נק. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי נק. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את ממד הקשרlienاري בין X ל- Y .

5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בוגרות ב-3 ומחיתנים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיטית התקן של ממוצע הציון בוגרות הייתה 2. מה מגדם המתאים בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בוגרות שלהם?

- 6)
- הלו רשימה טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.
 - א. מתוויך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שдолר אחד הוא 3.5 נק. אם מתוויך הדירות יחשב את ממד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.
 - ב. לסדרה של נתונים התקבל $S_x = S_y = 1$, $\bar{X} = \bar{Y}$. לכן, ממד הקשר של פירסון יהיה 1.
 - ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מגדם המתאים של פירסון יהיה 0.

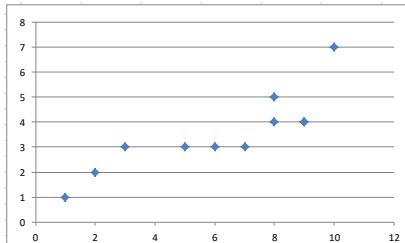
שאלות רב-ברירה:

- 7) נמצא שקיים מגדם מתאים שלילי בין הציון בעברית לחשבון בבחינה לכן:
- א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.
 - ב. ככל שהציון של תלמיד יורך בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
 - ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-2.4₪). מהו מקדם המתאים בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

- א. 1
- ב. 0
- ג. 4.2
- ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגרמת פיזור:
מה יהיה מקדם המתאים בין שני המשתנים?



- א. 1
- ב. 0.85
- ג. 0.15
- ד. 0

תשובות סופיות

- 1) א. משתנה תלוי : ציון, משתנה ב"ת : מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחליqi בין מספר החיסורים לציון התלמיד.
 ב. $r_{xy} = -0.9325$.
 ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חליqi אך עצמתו תחלש.
- 2) א. $r_{xy} = 0.96$ ב. $\bar{x} = 15.4$, $\bar{y} = 16$.
 3) א. 0.8
 4) ב. 0.8
 5) ג. 1.
 6) א. נכון.
 ב. לא נכון.
 ג. נכון.
- 7) א. ג'.
 8) א'.
 9) ב'.

בדיקות השערות על מקדם המתאיםlienاري – רקע

מדד הקשרlienاري באוכולוסייה, שנראה גם מקדם המתאים של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכולוסייה מסומן ב: r - פרמטר המאפיין את עצמת הקשרlienاري וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים באוכולוסייה. כאשר:

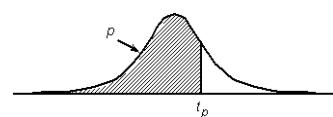
- מדד הקשרlienاري במדגם שמהווה אומד לפרמטר r .

השערת האפס: תהיה שבאוכולוסייה לא קיים כלל קשרlienاري בין שני המשתנים $0 = \rho$.
ההנחה שעלייה אנו מtabסים בתחילת היא שני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

$$\text{סטטיסטי המבחן: } t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t(n-2)$$

סטטיסטי זה מתפלג t עם $n-2$ דרגות חופש.

$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	$H_0: \rho = 0$	השערת האפס :
$H_1: \rho > 0$	$H_1: \rho < 0$	$H_1: \rho \neq 0$	השערת המחקר :
$t \geq t_{1-\alpha}$	$t \leq -t_{1-\alpha}$	$t \geq t_{1-\alpha}$ או $t \leq -t_{1-\alpha}$	כל ההכרעה: אזור דחייה של השערת האפס

טבלת ערכים קרייטיים של ζ - נספח: טבלת התפלגות T
 P 

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

שאלות

1) להלן נתונים על הוווטק בעבודה (בשנים) ועל השכלה (בשנים) במדגם של 10 עובדים :

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	נבדק
24	17	28	5	9	16	8	2	18	13	X - הווטק
15	12	8	13	12	11	8	17	14	12	Y - השכלה

מقدم המתאים חושב והתקבל: 0.31-- .

א. האם קיימים מתאים בין וווטק העובד להשכלה? בדקו ברמת מובהקות של 5%?

ב. אם הווטק של העובד היה נמדד בחודשים האם התשובה לסעיף א' הייתה משתנה?

2) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין גיל נשים בהריאן לרמת ההמוגולובי שלחן בדם בזמן הריאן. נדרגו 7 נשים והתקבלו התוצאות הבאות:

גיל	1	2	3	4	5	6	7	נבדק
המוגולובי	14.7	13.5	9.7	12	10.8	13	10.3	
גיל	39	34	30	29	28	26	23	

במדגם חושב מדד הקשר של פירסון להיות 0.7.

א. האם ניתן לומר שבמדגם אם איש היא יותר מבוגרת אזי בהכרח יש לה יותר המוגולובי בדם?

ב. האם ניתן לומר, ברמת מובהקות של 5%, שקיים מתאם בין גיל האישה שהריאן לבין רמת ההמוגולובי שלה בדם?

3) בתחנה המטאורולוגית רצוי לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיות לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאים שהתקבל היה 0.8.-.

א. בדקו ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים קשר לינארי שלילי בחודש ינואר בין הטמפרטורה במעלות צלזיות לבין המשקעים במעלות צלזיות.

ב. כיצד הייתה המשתנה התשובה לסעיף א' אם היו מוסיפים עוד תצפיות למדגם?

ג. על סמך טבלת D המצורפת עבור אילו רמות מובהקות ניתן להחליט שקיים קשר לינארי שלילי מובהק?

4) מtower דירות חישב את מועד המתאים בין שטח דירה במרכז תל אביב לבין המחיר של הדירה עבור 17 דירות. מועד המתאים שקיבל היה 0.6.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם ניתן להגיד שקיים קשר ישיר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה במרכז תל אביב?

ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת השערת שקיים קשר ישיר עולה בין שטח הדירה לבין מחיר הדירה בתל אביב.

תשובות סופיות

- ב. לא תשתנה. 1) א. לא נדחה את H_0 .
- ב. לא נדחה את H_0 . 2) א. לא
- ב. לא ניתן לדעת. 3) א. נדחה את H_0 .
- ב. $0.005 < P_v < 0.01$. 4) א. נדחה את H_0 .

מדד הקשר הלינארי – ניתוח פלטיטים – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרה גם מקדם המתאים של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב: ρ - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר :

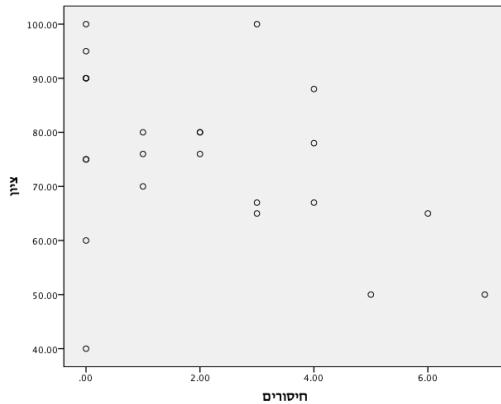
- ג' - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר ρ .

השערת האפס : תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים: $H_0: \rho = 0$.

ההנחה שעלייה אנו מtabססים בתחילת הימ"ש היא שני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

דוגמה (פתרון בהקלטה) :

הזדיקן ביקש לדגום סטודנטים כדי לבדוק את הקשר בין ציון הסטודנט בקורס במספר הפעמים שהוא החסיר שיעור בקורס. דיאגרמת הפיזור שהתקבל במדגם שבוע:



- א. מיהו המשתנה תלוי
ומיהו המשתנה הבלתי תלוי
במחקר?
- ב. מה ניתן לראות לגבי הקשר
הלינארי בין המשתנים
שהתקבל במדגם?

Correlations

		חיסורים	ציון
חיסורים	Pearson Correlation	1	-.389
	Sig. (2-tailed)		.060
	N	24	24
ציון	Pearson Correlation	-.389	1
	Sig. (2-tailed)	.060	
	N	24	24

- ג. מהו מקדם המתאים שהתקבל במדגם? מה המשמעות שלו?
- ד. האם ניתן להגיד ברמת מובהקות של 5% שישים מתאים לינארי שלילי בין מספר החיסורים של הסטודנטים מהקורס לבין הציון של הסטודנטים בקורס?

שאלות

1) מחקר רפואי התעניין לבדוק האם קיים קשר לינארי בין גיל האישה בהריון לרמת הemoglobin שלה. להלן תוצאות מדגם שהתקבלו, עבור נשים בהריון:

Correlations

		age	hemoglobin
age	Pearson Correlation	1	.565
hemoglobin	Pearson Correlation	.565	1
	Sig. (2-tailed)	.005	
	N	23	23

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מahan השערות המחקר?
- ג. מהו המשתנה הבלטי תלוי ומהו המשתנה התלויה במחקר?
- ד. מהי מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

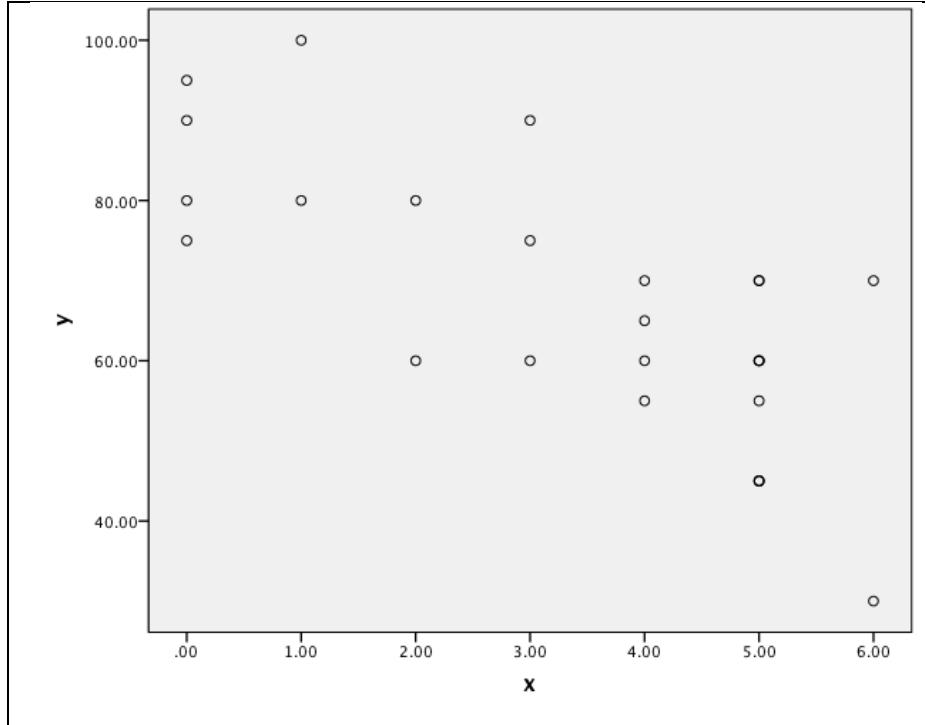
2) במדגם שנעשה נבדקו מספר משתנים על התכפיות שנדגמו. להלן פלט שהופק על המדגם?

Correlations

		x	y	z	w
x	Pearson Correlation	???	-.682	.134	.176
y	Sig. (2-tailed)		.005	.634	.530
	N	15	15	15	15
y	Pearson Correlation	-.682	1	???	-.555
	Sig. (2-tailed)	.005		.544	.032
	N	15	15	15	15
z	Pearson Correlation	.134	.170	1	-.247
	Sig. (2-tailed)	???	.544		.374
	N	15	15	15	15
w	Pearson Correlation	.176	-.555	-.247	1
	Sig. (2-tailed)	.530	.032	.374	
	N	15	15	15	15

- א. בין אילו שני משתנים שונים הקשר הלינארי במדגם נמצא עם העוצמה הכי חזקה?
- ב. ברמת מובהקות של 5%, אילו שני משתנים בעלי קשר לינארי מובהק?
- ג. השלימו את המספרים המסומנים בפלט בסימני שאלה.

(3) נדגו מספר תלמידים בכיתה יב' ובדקו לכל תלמיד : X - מספר שעות שבועיות שהתלמיד צופה בטלוויזיה ביום Y - ציון הבגרות שלו במתמטיקה.
 להלן התוצאות שהתקבלו במחקר :

**Correlations**

		x	y
x	Pearson Correlation	1	-.741**
y	Pearson Correlation	-.741**	1
	Sig. (2-tailed)	.000	
	N	26	26

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- מהו המשתנה התלו依 ומהו המשתנה הבלתי תלוי?
- מהו כיוון הקשר שהתקבל במדגם ומהו עוצמתו?
- האם ניתן להגיד שבאופן מובהק ככל שתלמיד צופה יותר בטלוויזיה הוא מצליח פחות בבגרות במתמטיקה?
- בהמשך לסעיף הקודם, האם ניתן להגיד שהסיבה להצלחה או אי הצלחה בבגרות במתמטיקה היא זמן הצפייה בטלוויזיה?

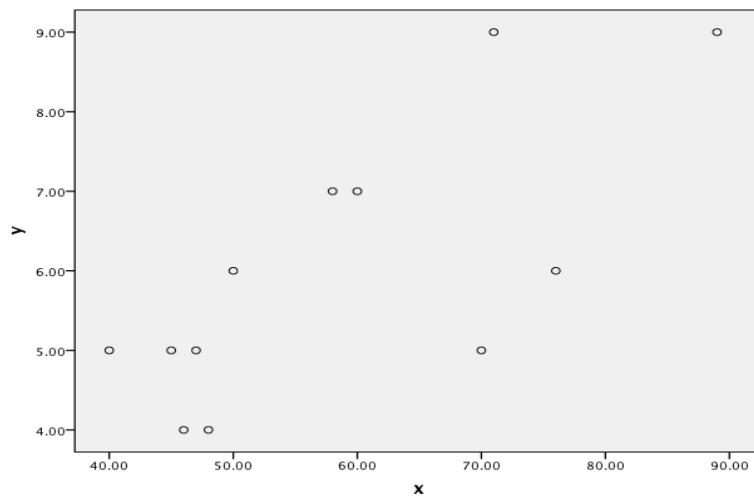
- 4) נדגמו ילדים בגיל 8 ונבדק עבור כל ילד גובהו בס"מ ומשקלו בק"ג. להלן הפלט שהתקבל עבור תוצאות המדגם:

Correlations

	גובה	משקל	
Pearson Correlation	1	.552	גובה
Sig. (2-tailed)		.062	
N	12	12	משקל
Pearson Correlation	.552	1	
Sig. (2-tailed)	.062		
N	12	12	

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים קשר לנארី חיובי בין המשקל והגובה.
 ב. באילו רמות מובהקות ניתן לקבוע שקיים קשר לנארី חיובי בין במשקל והגובה?
 ג. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היו מתווספות עוד 3
 תכפיות למדגם?

- 5) בתקלิก כימי מסוים חוקר בדק את הקשר בין הטמפרטורה בתקליך (X) לבין אחוז החומר (Y) בתקליך. דיאגרמת הפיזור שהתקבל היא:



		Correlations	
		x	y
x	Pearson Correlation	1	.732**
	Sig. (2-tailed)		.007
	N	12	12
y	Pearson Correlation	.732**	1
	Sig. (2-tailed)	.007	
	N	12	12

**. Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- א. מה ניתן להגיד על סמך הפלט על הקשר שנמצא במדגם בין הטמפרטורה בתקליך לאחוז החומר?
- ב. האם הקשר בין הטמפרטורה בתקליך לבין אחוז החומר הוא קויי חיובי מובהק? בדקו ברמת מובהקות של 5%.
- ג. מה הייתה קוראה למقدم המתאם במדגם ומובהקות התוצאה אם הייתה מתווספת תצפויות שבה הטמפרטורה היא 40 ואחוז החומר 9?

תשובות סופיות

$$\begin{aligned} H_0 : p &= 0 \\ H_1 : p &\neq 0 \end{aligned}$$

1) א. נשים בהריון.

ג. משתנה תלוי – רמת ההמוגלובין, משתנה בלתי תלוי – גיל.

ד. קיימים קשר לינארי בין גיל האישה בהריון לרמת ההמוגלובין שלה בדם.

2) א. בין X ל- Y . ב. X ו- Y . כמו כן, W ו- Y . ג. ראה וידאו.

3) א. משתנה תלוי – ציון בברגות במתמטיקה, משתנה בלתי תלוי – שעות צפייה.

ב. כיוון שלילי ועוצמה של 0.741. ג. כן. ד. לא.

4) א. נדחה את H_0 . ב. לפחות 0.032.

5) א. קיימים קשר לינארי חיובי וחלוקת שיעורו: 0.732. ב. נדחה את H_0 .

ג. מקדים המתאים קטן ומובהקות התוצאה גדולה.

סטטיסטיקה

פרק 24 - רגסיה פשוטה

תוכן העניינים

1. כללי

273

מדדי קשר – גרסיה ליניארית:

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הcentsiyim נוהג לבצע ניבוי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו גרסיה המנeba משתנה אחד על סמך الآخر. מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X .

השיטה למציאת הקו הניל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתתקבל נקרא קו הגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

- a - נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא נקרא החותך של הקו.
- b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידת אחת על גבי קו הניבויים.

להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הגרסיה:
$$Y = bX + a \quad , \quad b = r \frac{S_r}{S_x}$$

לצורך בניית קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נctrיך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

שאלות:

1) נסמן ב- X את הכנסה של משפחה באלי פ. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלי פ. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{20} Y_i &= 200, \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240 \\ \cdot \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 &= 76, \quad \sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \\ \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) &= 60.8\end{aligned}$$

א. חשבו את מודד הקשר הlienاري בין X ל- Y . מיהו המשתנה תלוי?

ב. מצאו את קו הרgression לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבירו את משמעות הפרמטרים של קו הרgression.

ג. משפחת כהן הכנסה 15,000 פ. מה ההוצאה הצפואה שלה?

2) נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות לימוד. נסמן ב- Y את הכנסתו באלי פ. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$S_x = 2, \quad S_y = 5, \quad \bar{X} = 14, \quad \bar{Y} = 8, \quad \text{COV}(X, Y) = 7.5$$

א. חשבו את מודד הקשר של פירסונו בין ההשכלה להכנסה.

ב. מה הכנסה הצפואה לאדם שהשכלתו 12 שנים?

ג. מה ההשכלה הצפואה לאדם שהכנסתו 10,000 פ.?

3) חוקר רצה לחקור את הקשר הקוווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאים בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.

א. על פי משווהת הרgression, שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן ב-?

ב. על פי משווהת הרgression, תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כל יקבל ציון?

ג. מהו קו הרgression לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?

4) נתונים 2 משתנים X ו- Y . כמו כן נתון: $S_x = S_y = 4$, $\bar{X} = 1.5$.

וכן שקו הרgression של Y על בסיס X הינו: $Y = -0.2X + 0.5$.

חשבו מהו מקדם המתאים בין X ל- Y .

תשובות סופיות:

- | | | | |
|---------|--------------------|---------|--------------------|
| ג. 12.4 | . $Y = 0.8X + 0.4$ | ב. 0.8 | א. 0.8 (1) |
| ג. 14.6 | . $Y = 1.2X + 29$ | ב. 4.25 | א. 0.75 (2) |
| | . | ב. 29 | א. 1.2 (3) |
| | | | . -0.2 (4) |

סטטיסטיקה

פרק 25 - רגרסיה מרובה

תוכן העניינים

1. רגרסיה מרובה

(ללא ספר)